Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 2: Lineare Optimierung

Zentrale Aufgabe:

Transformation Wirtschaftliche Textaufgabe → Lineares Ungleichungssystem mit Zielfunktion
Herangehensweise:

i) Was wird optimiert (minimiert oder maximiert)?
ii) Welche Größen sollen berechnet werden (→ Variable)
iii) Welche Nebenbedingungen (lineare Ungleichungen) gelten für die Variablen?

Graphische Interpretation und Lösung:

- Die einzelnen Lösungsmengen für die lineare Ungleichungen entsprechen einer Seite von einer Geraden (Hyperebene).
- Die Gesamtlösungsmenge ist die Schnittmenge der einzelnen Lösungsmengen. Sie ist immer konvex.
- Die lineare Zielfunktion ist immer eine Gerade mit vorgegebener Steigung, aber unbekannten Achsenabschnitten. Sie muss so weit wie möglich nach oben (Maximierungsproblem) oder unten (Minimierungsproblem) verschoben werden.
- Eine Gerade in R^2 bekommt man zeichnerisch am schnellsten durch 2 vorgegebene Punkte, indem man die Koordinaten abwechselnd auf Null setzt.
- Das Optimum wird immer an einer Ecke der Gesamtlösungsmenge erreicht. Falls mehrere Ecken optimal sind, ist auch die Strecke (Hyperfläche) dazwischen optimal.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 3: Simplexverfahren

Grundsätzliche Modellierung:

- Alle Variablen müssen ≥ 0 sein.
- Ungleichungen werden durch Gleichungen ersetzt, indem für jede Ungleichung eine Schlupfvariable eingeführt wird.
- Die Zielfunktion wird in das Gleichungssystem mit aufgenommen.

Einfache Variante:

- Alle Ungleichungen sind vom Typ ≤ und alle rechten Seiten sind ≥ 0.
- Zielfunktion soll maximiert werden.
- Dann ist der Nullpunkt für die ursprünglichen Variablen immer eine zulässige Lösung.

Vorgehensweise:

- Es wird zwischen Basisvariablen (BV) und Nichtbasisvariablen (NBV) unterschieden. Jede BV wird einer Gleichung zugeordnet. Anfangs sind das die Schlupfvariablen und –z, welches aber nicht als Spalte mit aufgenommen wird, weil der Koeffizient immer 1 bleibt.
- Alle NBV müssen Null sein. Anfangs gehören die ursprünglichen Variablen zu den NBV.
- Das Gleichungssystem wird reduziert, indem alle BV den Koeffizienten 1 in einer Gleichung haben und 0 in allen anderen. Das wird durch das Gauss-Jordan-Verfahren erreicht.
- Es wird sukzessive ein Basiswechsel durchgeführt: Die eintretende Variable ergibt sich aus dem maximalen Koeffizienten der Zielfunktionszeile (andere Heuristik denkbar), die austretende Variable aus dem minimalen Quotienten RS/Koeffizient, wobei der Koeffizient positiv sein muss.
- Wenn es keinen positiven Koeffizienten von NBV in der Zielfunktionszeile mehr gibt, dann ist das Optimum erreicht.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 3: Simplexverfahren

Verallgemeinerung auf beliebige Ungleichungen und Gleichungen (Maximumproblem):

- Alle rechten Seiten (RS) müssen ≥ 0 sein (kanonische Form).
- Für alle ≥-Ungleichungen und Gleichungen gibt es zusätzliche künstliche Variable, die hinzugezählt werden und für den Fehler der Nulllösung stehen. Diese stehen anfangs in der Basis und müssen zunächst aus der Basis entfernt werden.
- Es gibt eine zusätzliche Zielfunktionszeile $-z_2$, welche an den KV den Koeffizienten -1 hat und sonst 0. Die ursprüngliche Zielfunktionszeile -z hat weiterhin die Koeffizienten aus der Zielfunktion.
- Das Gleichungssystem muss noch reduziert werden, indem auch in $–z_2$ die Koeffizienten der BV auf 0 gesetzt werden. Dadurch werden andere Koeffizienten dieser Zeile ≠ 0.

Vorgehensweise:

- Es wird zunächst durch Basiswechsel erreicht, dass eine Lösung $z_2 = 0$ erzielt wird. Hierbei wird dieselbe Heuristik für $–z_2$ verwendet wie bei der einfachen Variante für –z. Außerdem dürfen alle KV, die aus der Basis gestrichen werden, nie wieder in die Basis eintreten. Damit erhält man eine zulässige Basislösung. Falls das nicht möglich ist, ist die Lösungsmenge leer.
- Wenn man eine zulässige Basislösung hat, kann die zusätzliche Zielfunktionszeile $–z_2$ gestrichen werden, und das Simplexverfahren wird wie bei der einfachen Variante fortgesetzt, bis eine optimale Lösung gefunden ist.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 3: Simplexverfahren

Minimumproblem:

- Zielfunktion wird mit -1 multipliziert und das System in ein Maximumproblem verwandelt.

Feststellen der Nichtlösbarkeit:

- Wenn man in der $-z_2$-Zeile auf der RS keine Null hat und kein Koeffizient einer NBV mehr positiv ist, dann ist die Menge der zulässigen Lösungen leer.
- Wenn für die –z-Zeile alle Koeffizienten in der Pivotspalte der eintretenden Variable nichtpositiv sind, dann ist die Lösungsmenge unbeschränkt, und es gibt kein Optimum.

Feststellen der Mehrdeutigkeit:

- Wenn RS = 0 für eine BV, dann schneiden sich mehr als 2 Geraden (mehr als n Hyperebenen) in einem Punkt. Die Auswahl der BV ist dann nicht eindeutig, wohl aber der Punkt, der durch diese Auswahl repräsentiert wird.
- Wenn der Koeffizient für eine NBV in der Zielfunktionszeile 0 ist und diese Variable in die Basis eingewechselt werden kann, dann gibt es eine zweite Ecke als gleich gute Lösung für die Zielfunktion. Alle Punkte der Konvexkombination zwischen den Ecken mit derselben Lösung liefern ebenfalls eine Lösung mit demselben Zielfunktionswert. Relevant ist das nur, wenn das Optimum erreicht ist, also keine andere NBV mit positivem Zielfunktionskoeffizienten mehr existiert.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 4: Sensitivitätsanalyse

Zentrale Aufgabe:

Es wird für einzelne Parameter (Koeffizienten) untersucht, welche Auswirkungen es auf die Lösung hat, wenn sich diese um ein ε ändern.
Wir untersuchten 2 Typen von Änderungen:
i) Änderung des Zielfunktionskoeffizienten für eine bestimmte Variable
ii) Änderung des Parameters auf der rechten Seite einer Ungleichung

Änderung des Zielfunktionskoeffizienten:

Das entspricht einem veränderten Anstieg der Zielfunktionsgerade (-hyperebene). Es wird untersucht, wie stark die Änderung sein darf, ohne dass sich die optimale Lösung ändert.

Vorgehen (falls die **Variable** des Zielfunktionskoeffizienten **in der Basis** ist):
- Maximumproblem: Schreibe ε statt 0 in den Zielfunktionskoeffizienten der betreffenden Variable ins Endtableau der bisherigen Lösung.
- Minimumproblem: Schreibe -ε statt 0 in den Zielfunktionskoeffizienten der betreffenden Variable ins Endtableau der bisherigen Lösung.
- Bringe das Tableau wieder in kanonische Form → ε taucht in anderen Zielfunktionskoeffizienten auf
- Untersuche, wie groß ε sein darf, damit die anderen Zielfunktionskoeffizienten weiter nichtpositiv bleiben.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 4: Sensitivitätsanalyse

Zentrale Aufgabe:

Es wird für einzelne Parameter (Koeffizienten) untersucht, welche Auswirkungen es auf die Lösung hat, wenn sich diese um ein ε ändern.
Wir untersuchten 2 Typen von Änderungen:
i) Änderung des Zielfunktionskoeffizienten für eine bestimmte Variable
ii) Änderung des Parameters auf der rechten Seite einer Ungleichung

Änderung des Zielfunktionskoeffizienten:

Das entspricht einem veränderten Anstieg der Zielfunktionsgerade (-hyperebene). Es wird untersucht, wie stark die Änderung sein darf, ohne dass sich die optimale Lösung ändert.

Vorgehen (falls die **Variable** des Zielfunktionskoeffizienten **nicht in der Basis**, also = 0 ist):

- Maximumproblem: Schreibe c+ε statt c in den Zielfunktionskoeffizienten der betreffenden Variable ins Endtableau der bisherigen Lösung.
- Minimumproblem: Schreibe c-ε statt c in den Zielfunktionskoeffizienten der betreffenden Variable ins Endtableau der bisherigen Lösung.
- Dieser Koeffizient muss weiterhin nichtpositiv sein: Berechne das ε, welches das gewährleistet.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 4: Sensitivitätsanalyse

Zentrale Aufgabe:

Es wird für einzelne Parameter (Koeffizienten) untersucht, welche Auswirkungen es auf die Lösung hat, wenn sich diese um ein ε ändern.
Wir untersuchten 2 Typen von Änderungen:

i) Änderung des Zielfunktionskoeffizienten für eine bestimmte Variable
ii) Änderung des Parameters auf der rechten Seite einer Ungleichung

Änderung des Parameters auf der rechten Seite:

Das entspricht einer Verschiebung der Begrenzungsgerade (-hyperebene). Es wird untersucht, wie stark die Änderung sein darf, ohne dass der Schnittpunkt, der die optimale Lösung bestimmt, die Zulässigkeit verliert (die Koordinaten des Schnittpunkts ändern sich kontinuierlich).
Vorgehen:

- Falls die Schlupfvariable der betreffenden ≤-Ungleichung eine BV ist, dann darf die rechte Seite maximal um den Wert dieser Variable reduziert, aber beliebig gesteigert werden.
- Falls die Schlupfvariable der betreffenden ≥-Ungleichung eine BV ist, dann darf die rechte Seite maximal um den Wert dieser Variable gesteigert, aber beliebig reduziert werden.
- Falls die Schlupfvariable der betreffenden Ungleichung eine NBV, also gleich 0 ist, dann muss untersucht werden, welche Auswirkung es auf die Basisvariablen hat, wenn diese Schlupfvariable einen positiven Wert bekommt. Es muss dafür gesorgt werden, dass alle Basisvariablen ≥ 0 bleiben. Daraus ergibt sich ein zulässiger Bereich für die Schlupfvariable. Aus diesem ergibt sich der maximale Bereich für die rechte Seite: Für eine ≤-Ungleichung wird dieser zulässige Bereich von der bisherigen rechten Seite subtrahiert, für eine ≥-Ungleichung wird er addiert,

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 5: Duales Problem

Allgemeines Prinzip:

- Zu jedem Maximierungsproblem existiert ein duales Minimierungsproblem (und umgekehrt).
- Jede zulässige Lösung des Minimierungsproblems ist ≥ jeder zulässigen Lösung des dualen Maximierungsproblems. Bei Gleichheit ist die Optimalität in beiden Problemen erreicht.
- Die **dualen Variablen** entsprechen den **primalen (Un)gleichungen**.

Ihr Vorzeichen hängt folgendermaßen vom Relationszeichen der primalen Ungleichung ab:

Primale Gleichungen entsprechen dualen Variablen, die unbeschränkt sind.
Primale ≤ – Restriktionen entsprechen dualen Variablen ≥ 0 (primales Maximierungsproblem)
Primale ≥ – Restriktionen entsprechen dualen Variablen ≤ 0 (primales Maximierungsproblem)
Primale ≤ – Restriktionen entsprechen dualen Variablen ≤ 0 (primales Minimierungsproblem)
Primale ≥ – Restriktionen entsprechen dualen Variablen ≥ 0 (primales Minimierungsproblem)

- Die **dualen Ungleichungen** entsprechen den **primalen Variablen** :

Für **primale Maximierungsprobleme** sind **alle dualen Ungleichungen ≥**.
Für **primale Minimierungprobleme** sind **alle dualen Ungleichungen ≤**.

Duale Ungleichungen entsprechen den **Spalten des primalen Problems**:
Die **Koeffizienten der dualen Variablen** entsprechen den **Koeffizienten der primalen Variablen**, und die **rechte Seite der dualen Ungleichung** ist der **Koeffizient der primalen Zielfunktion**.

- Die **duale Zielfunktion** ergibt sich aus der **rechten Seite der primalen Ungleichungen**..

Transformationen für Variable, die nicht ≥ 0 sind:

- Variablen, die ≤ 0 sind, werden durch ihre negativen Variablen ersetzt. Das führt zu umgekehrten Vorzeichen in den Koeffizienten für diese Variablen.
- Unbeschränkte Variable v werden durch zwei nichtnegative Variable v^+, v^- mit dem Term ($v^+ - v^-$) in allen Ungleichungen und in der Zielfunktion des dualen Problems ersetzt.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 6: Ganzzahlige lineare Optimierung

Allgemeine Aufgabenstellung und Lösungsprinzip:

- Bestimmte Variablen dürfen nur ganzzahlige Lösungen haben. Welche Variablen das sind, muss gegebenenfalls dem Text entnommen werden: Meistens sind es Produkte oder Rohstoffe, die nicht in beliebigen Bruchteilen gefertigt werden können bzw. zur Verfügung stehen.
- Ganzzahlige Optimierungsprobleme sind im Allgemeinen nicht effizient lösbar, sodass sie nur dann exakt gelöst werden, wenn die Komplexität der Aufgabenstellung (Anzahl der Variablen) klein ist, oder durch einen Approximationsalgorithmus gelöst werden, der auf eine exakte optimale Lösung verzichtet.
- In dieser Vorlesung wurde nur das Branch-and Bound-Verfahren vorgestellt, das folgendermaßen funktioniert: Für eine optimale Lösung wird bei einer Variable x, die ganzzahlig sein soll, aber in dieser Lösung die nicht ganzzahlige Lösung x_0 hat, das Problem aufgespalten in zwei Teilprobleme, welche die zusätzliche Restriktion $x \geq \lfloor x_0 \rfloor$ bzw. $x \leq \lceil x_0 \rceil$ haben. Das wird so lange gemacht, bis ein Unterproblem nur noch ganzzahlige Lösungen hat. Die Existenz einer solchen Lösung ergibt sich daraus, dass das Simplexverfahren grundsätzlich Ecken ausgibt, welche immer mehr ganzzahlige Koordinaten haben, aber dieser Lösungsweg ist nicht sehr effizient.

Spezielle Technik, um alternative Restriktionen der Form ≤ 0 zu modellieren:

- Das wird durch eine neue binäre Variable x_i pro Alternative i erreicht:.
- Die erste Restriktion wird $\leq M \cdot x_i$ gesetzt, die zweite $\leq M \cdot (1-x_i)$
- M wird als Maximum der Werte bestimmt, die sich aus allen Restriktionen für die einzelnen Variablen ergeben.

Es kann für M auch irgendein Wert genommen werden, der auf keinen Fall überschritten wird.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 7: Transportproblem

Aufgabenstellung (einfache Form):

Die Aufgabe besteht darin, Lieferungen eines einheitlichen Transportguts von Quellen $u_1, \ldots, u_m$ zu Zielen $v_1, \ldots, v_n$ unter folgenden Bedingungen zu organisieren:

- Jede Quelle u_i hat einen Vorrat a_i und jedes Ziel v_j hat einen Bedarf b_j.
- Der Weg von u_i nach v_j verursacht die *nichtnegativen* Kosten c_{ij} pro Liefereinheit.
- Die Summe der Vorräte a_i und die Summe der Bedarfe b_j soll gleich sein.
- Eine zulässige Lösung soll alle Vorräte aufbrauchen und alle Bedarfe decken.
- Ziel ist es, die *nichtnegativen* Liefermengen x_{ij} von u_i nach v_j derart zu bestimmen, dass die Summe aller Kosten $x_{ij} \cdot c_{ij}$ minimal ist.

Grundsätzliche Lösungsmethode:

- Das Problem wird als LOP aus m+n Gleichungen formuliert: Für jede Quelle u_i muss die Summe aller $x_{ij} \cdot c_{ij}$ gleich dem Vorrat a_i sein, und für jede Quelle v_j muss die Summe aller $x_{ij} \cdot c_{ij}$ gleich dem Bedarf b_j sein.
- Wegen der Bedingung, dass die Summe aller Vorräte gleich der Summe aller Bedarfe sein muss, gibt es m+n-1 linear unabhängige Basislösungen.
- Es werden m+n-1 Basisvariable x_{ij} definiert, die nicht Null sind, und alle anderen werden auf Null gesetzt.
- Diese Basislösung wird schrittweise verbessert, bis das Optimum erreicht ist.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 7: Transportproblem

Erstellen einer Eröffnungslösung:

- Jede Lösung soll zulässig sein, d.h. die Summe aller Zeilen und die Summe aller Spalten muss gleich der rechten Seite (Vorrat a_i bzw. Bedarf b_j) sein.
- Damit eine Lösung durch Basiswechsel verbessert werden kann, wird der Basisgraph aus m+n-1 Basisfeldern betrachtet, dessen Kanten dadurch entstehen, dass jedes Basisfeld mit jedem anderen verbunden wird, das in derselben Zeile oder Spalte steht. Dieser **Basisgraph muss zusammenhängend** sein. Äquivalent dazu ist, dass der **Basisgraph kreisfrei** ist. Eine dafür notwendige (aber nicht in jedem Fall hinreichende) Bedingung ist, dass keine Basisvariable in Zeile **und** Spalte alleine steht (in einer von beiden ist es aber erlaubt!).
- Die erste Lösung kann grundsätzlich beliebig erstellt werden, solange die vorige Bedingung beachtet wird.
- In der Vorlesung wurde das **Matrixmimimumverfahren** als Eröffnungslösung vorgestellt, welche als Basisvariablen diejenigen nimmt, wo die Kosten am geringsten sind und wo noch eine Nichtnullkapazität berücksichtigt werden kann, um die entsprechende Restriktionsgleichung für Zeile und Spalte zu erfüllen. Jede so gewählte Basisvariable wird mit maximal möglicher Kapazität belegt. Wenn zum Schluss noch nicht m+n-1 Variablen ausgewählt wurden, werden weitere mit Null belegt, sodass die zuvor genannte Lösungsbedingung der Kreisfreiheit eingehalten wird.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 7: Transportproblem

Verbesserung einer Lösung mit der Stepping-Stone-Methode:

- Es wird für jede *Nichtbasisvariable* x_{ij} untersucht, was es bringt, diese um eine Einheit zu erhöhen: Dazu werden in einem Rundweg, der abwechselnd vertikal und horizontal verläuft und dessen Ecken aus Basisvariablen bestehen, sukzessive andere Variable gesenkt bzw. erhöht, sodass insgesamt alle Restriktionsgleichungen weiterhin erfüllt sind. Als Resultat gibt es eine *Bewertungszahl*, für jede Nichtbasisvariable x_{ij} welche die Verbesserung (negativ) oder Verschlechterung (positiv) pro Einheit berechnet.
- Es wird die Nichtbasisvariable x_{ij} mit der niedrigsten negativen Bewertungszahl ausgewählt, in die Basis aufgenommen und um die maximal mögliche Belegung erhöht. Diese Belegung ergibt sich aus der niedrigsten Belegung für die Basisvariablen des Rundweges, die gesenkt werden müssen. Die bisherigen Basisvariablen auf dem Rundweg werden abwechselnd gesenkt und erhöht. Mindestens eine Basisvariable wird dadurch auf Null gesetzt, welche aus der Basis herausfällt.
- Das Optimum ist erreicht, wenn keine Bewertungszahl negativ ist bzw. wenn die maximal mögliche Belegung für alle negativen Bewertungszahlen Null ergibt.

Beschleunigung der Berechnung der Bewertungszahl mit der MODI-Methode:

- Für jede Basisvariable wird die duale Gleichung $u_i + v_j = c_{ij}$ bestimmt.
- Im resultierenden Gleichungssystem gibt es m+n-1 Gleichungen mit m+n Variablen, also einen Freiheitsgrad. Eine Variable wird auf Null gesetzt und alle anderen Variablen dann ausgerechnet.
- Die Bewertungszahl für die Nichtbasisvariable x_{ij} ergibt sich dann nach der Formel $c_{ij} – u_i – v_j$.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 7: Transportproblem

Transportproblem bei Ungleichheit von Vorrat und Bedarf:

- Wenn es mehr Vorrat als Bedarf gibt, wird eine dummy-Bedarfsstelle v_{n+1} eingerichtet. Die Transportkosten für jedes Feld der neuen Spalte sind Null. Errechnete Lieferungen nach v_{n+1} finden nicht wirklich statt.
- Wenn es mehr Bedarf als Vorrat gibt, wird eine dummy-Vorratsstelle u_{m+1} eingerichtet. Die Transportkosten für jedes Feld der neuen Zeile sind Null. Errechnete Lieferungen von u_{m+1} finden nicht wirklich statt.
- Falls bestimmte Quellen auf jeden Fall liefern sollen oder bestimmte Ziele auf jeden Fall beliefert werden sollen, werden die Transportkosten von oder zum dummy auf eine sehr hohe Zahl M gesetzt, welche auf keinen Fall berücksichtigt wird.

Routensperrung:

- Falls bestimmte Lieferungen x_{ij} vermieden werden sollen, werden die Transportkosten auf eine sehr hohe Zahl M gesetzt, welche auf keinen Fall berücksichtigt wird.

Maximierung statt Minimierung:

- Falls die Transportkosten durch Transportgewinne interpretiert werden, die maximiert werden sollen, dann wird bei der Optimierung statt nach der minimalen negativen Bewertungszahl nach der maximalen positiven Bewertungszahl gesucht.

Unterschiedliche Produktionskosten:

- Unterschiedliche Produktionskosten p_i werden berücksichtigt, indem alle Transportkosten in der i-ten Zeile um p_i erhöht werden. Analoges gilt für unterschiedliche Verbrauchskosten.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 8: Zuordnungsproblem (Matching)

Aufgabenstellung:

Die Aufgabe besteht darin, von einer Menge $u_1, \ldots, u_n$ zu einer anderen Menge $v_1, \ldots, v_n$ jedes u_i genau einem v_j zuzuordnen. Es gibt für jede mögliche Zuordnung Kosten c_{ij}, deren Summe minimiert werden soll. Daher ist das ein Spezialfall des allgemeinen Transportproblems mit einer zusätzlichen Nebenbedingung (bijektive Zuordnung).

Lösung mit der ungarischen Methode:

- Erreiche durch gleichmäßige Subtraktion von jeweils konstanten Werten für jede Zeile und Spalte, dass in jeder Zeile und Spalte mindestens eine Null steht.
- Ziel ist es, unabhängige Nullen zu finden, sodass in jeder Zeile und Spalte genau eine Null steht.
- Falls das nicht möglich ist, werden minimal viele Zeilen und Spalten gestrichen, sodass alle Nullen gestrichen sind.
- Der kleinste nicht gestrichene Wert wird von allen nicht gestrichenen Werten abgezogen und zu allen doppelt gestrichenen Werten hinzugezählt. Wieder wird versucht, eine maximale Anzahl unabhängiger Nullen zu finden, bis das oben genannte Ziel erreicht ist.
- Die maximale Anzahl von unabhängigen Nullen entspricht nach dem Satz von König und Egervary der minimalen Anzahl von Zeilen und Spalten, die alle Nullen bedeckt.
- Diese maximalen Decklinien können mit scharfem Hinsehen oder einem gesonderten Algorithmus gefunden werden.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 8: Zuordnungsproblem (Matching)

Engpassproblem:
Es wird versucht, die maximale Zuordnungskostenzahl einer Zuordnung zu minimieren.
- Dazu wird zunächst eine untere Schranke bestimmt, die aus dem Maximum der minimalen Elemente in jeder Zeile und Spalte besteht.
- Falls nur diese Zahl minimiert werden soll, werden in der Kostenmatrix alle Kosten, die höher als die untere Schranke sind, gestrichen, und versucht, eine bijektive Zuordnung zu finden.

→ Achtung: Das ist nicht immer möglich!
- Falls zusätzlich noch die Gesamtkosten minimiert werden sollen, dann wird auf die so transformierte Matrix die ungarische Methode angewendet.

Maximierung statt Minimierung:
Falls die Summe der Zuordnungskosten maximiert werden soll, wird mit der negativen Matrix gearbeitet, für welche die Zuordnungskosten minimiert werden sollen.
→ Merke: Die ungarische Methode funktioniert auch für negative Zuordnungskosten.

Ungleiche Anzahl von Zeilen und Spalten:
Die Matrix wird mit einer entsprechenden Anzahl von dummy-Zeilen bzw. –Spalten aufgefüllt, bis sie quadratisch ist. Die Zuordnungskosten in den aufgefüllten Zeilen bzw. Spalten sind Null. Elemente, denen dummy-Partner zugewiesen wurden, gehen leer aus.

Zusammenfassung: Operations Research

Kapitel 9: Zielprogrammierung

Aufgabenstellung:
Es soll ein LOP gelöst werden, in dem die Erfüllung aller Nebenbedingungen nicht möglich ist. Hierbei wird zwischen harten (unbedingten) Nebenbedingungen unterschieden, deren Erfüllung gewährleistet sein soll, was möglich sein muss, sowie weichen (bedingten) Nebenbedingungen, die gegebenenfalls verletzt werden dürfen.

- Alle Nebenbedingungen werden als lineare Gleichungen mit entsprechenden Schlupfvariablen modelliert.
- Die Modellierung wird so vorgenommen, dass alle Variablen positiv sind.
- Die weichen Nebenbedingungen bekommen zusätzliche künstliche Variable, deren Vorzeichen den Schlupfvariablen entgegengesetzt ist. Diese stehen für das Maß der Verletzung der Nebenbedingung. Ziel ist es, die künstlichen Variablen möglichst klein zu halten.
- In der Vorlesung wurden 2 Methoden gezeigt: Gewichtungsmethode und Vorrangmethode.

1) Gewichtungsmethode:
Es werden für jede weiche Nebenbedingung Gewichte angegeben, welche die Relevanz der Erfüllung dieser Nebenbedingung repräsentieren. Ziel ist es, die Summe des Produktes aus Gewicht und künstlichen Variablen zu minimieren.

2) Vorrangmethode:
Es wird eine Reihenfolge für die Wichtigkeit der Erfüllung der Nebenbedingungen festgelegt. Dann wird als Zielfunktion die künstliche Variable für die wichtigste Nebenbedingung minimiert. Deren Lösung wird als unbedingte Nebenbedingung hinzugefügt und dann als Zielfunktion die künstliche Variable für die nächstwichtige Nebenbedingung minimiert. Das wird so lange durchgeführt, bis alle Bedingungen abgearbeitet sind oder bis festgestellt wurde, dass sich die Lösung nicht mehr ändert.