Lösungen zum Buch Diskrete Mathematik mit Grundlagen. 2. Auflage 2021

Jörg Porath, Sebastian Iwanowski

a) Der März oder der April hat 31 Tage.

Aussage 1:	$M :=$ „März hat 31 Tage“	Wert: wahr
Aussage 2:	$A :=$ „April hat 31 Tage“	Wert: falsch
Formel:	$M \vee A$	Wert: wahr

b) Entweder der März oder der April hat 31 Tage.

Aussage 1:	$M :=$ „März hat 31 Tage“	Wert: wahr
Aussage 2:	$A :=$ „April hat 31 Tage“	Wert: falsch
Formel:	$M \leftrightarrow \neg A$	Wert: wahr

c) Entweder der März oder der Mai hat 31 Tage.

Aussage 1:	$M :=$ „März hat 31 Tage“	Wert: wahr
Aussage 2:	$A :=$ „Mai hat 31 Tage“	Wert: wahr
Formel:	$M \leftrightarrow \neg A$	Wert: falsch

Aufgabe 1.1 d) - f)

d) Nachts scheint die Sonne und ich gehe spazieren.

Aussage 1:	N := „Nachts scheint die Sonne."	Wert: falsch
Aussage 2:	S := „Ich gehe spazieren."	Wert: wahr
Formel:	$N \wedge S$	Wert: falsch

e) Wenn Ebbe ist, dann ist keine Flut.

Aussage 1:	E := „Es ist Ebbe."	Wert: falsch
Aussage 2:	F := „Es ist Flut."	Wert: falsch
Formel:	$E \rightarrow \neg F$	Wert: wahr

f) Es ist kein Tag genau dann, wenn Nacht ist.

Aussage 1:	T := „Es ist Tag."	Wert: falsch
Aussage 2:	N := „Es ist Nacht."	Wert: wahr
Formel:	$\neg T \leftrightarrow N$	Wert: wahr

Aufgabe 1.2

Formen Sie aus den vorgegebenen aussagenlogischen Formeln natürlichsprachige Sätze.

Beispiel:	Formel:	$(p \rightarrow q)$
	Aussage 1:	p := „Der Gegner hat mehr Tore geschossen.“
	Aussage 2:	q := „Wir haben verloren.“
	Lösung:	Falls der Gegner mehr Tore geschossen hat, haben wir verloren.

a) $(\neg p \rightarrow \neg q)$
p: n ist durch 3 teilbar.
q: n ist durch 12 teilbar.

Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, ist n auch nicht durch 12 teilbar.

Aufgabe 1.2

b) $(\neg p \leftrightarrow q)$
p: Es ist Tag.
q: Es ist Nacht.

Genau dann, wenn es nicht Tag ist, ist es Nacht.

c) $((p \vee \neg q) \rightarrow r)$
p: Das Auto ist kaputt.
q: Das Auto hat Benzin im Tank.
r: Man muss das Auto schieben.

Wenn das Auto kaputt ist oder kein Benzin im Tank hat, muss man das Auto schieben.

Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden de Morganschen Regel der Aussagenlogik mit Hilfe einer Wahrheitstafel:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Spalte 4 (linke Seite) und Spalte 7 (rechte Seite) haben dieselben Wahrheitswerte.

Aufgabe 1.4

Beweisen Sie die Gültigkeit einer Variante des Distributivgesetzes der Aussagenlogik mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Spalte 5 (linke Seite) und Spalte 8 (rechte Seite) haben dieselben Wahrheitswerte.

Beweisen Sie den Kettenschluss mit einer Wahrheitstafel.

zu zeigen: $(p \to q) \wedge (q \to r) \implies (p \to r)$

p	q	r	$(p \to q)$	$(q \to r)$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$(p \to r)$
w	w	w	w	w	**w**	**w**
w	f	w	f	w	f	w
f	w	w	w	w	**w**	**w**
f	f	w	w	w	**w**	**w**
w	w	f	w	f	f	f
w	f	f	f	w	f	f
f	w	f	w	f	f	w
f	f	f	w	w	**w**	**w**

Wenn die linke Seite wahr ist, ist auch die rechte Seite wahr.
Die Zeilen, wo die linke Seite falsch ist, spielen keine Rolle.

Beweisen Sie den Kettenschluss durch Anwendung anderer logischer Äquivalenz- und Schlussregeln.

zu zeigen: $(p \to q) \land (q \to r) \implies (p \to r)$

$$
\begin{array}{lll}
& (p \to q) \land (q \to r) & \\
\underset{(1.3)}{\iff} & (\neg p \lor q) \land (q \to r) & \text{(Ersetzen der Implikation)} \\
\underset{(1.8)}{\iff} & (\neg p \land (q \to r)) \lor (q \land (q \to r)) & \text{(Distributivgesetz)} \\
\underset{(1.15)}{\implies} & \neg p \lor (q \land (q \to r)) & \text{(logische Einschränkung)} \\
\underset{(1.10)}{\implies} & \neg p \lor r & \text{(Modus ponens)} \\
\underset{(1.3)}{\iff} & (p \to r) \quad \checkmark & \text{(Ersetzen der Implikation)}
\end{array}
$$

Aufgabe 1.6

Beweisen Sie das logische Prinzip des indirekten Beweises entweder mit einer Wahrheitstafel oder durch Anwendung anderer Logikgesetze.

zu zeigen: $(\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q) \implies p$

$$(\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$$

$$\underset{(1.2)}{\iff} (\neg p \to q) \wedge (q \to p) \qquad \text{(Kontraposition)}$$

$$\underset{(1.12)}{\implies} \neg p \to p \qquad \text{(Kettenschluss)}$$

$$\underset{(1.3)}{\iff} \neg\neg p \vee p \qquad \text{(Ersetzen der Implikation durch } \neg \text{ und } \vee\text{)}$$

$$\underset{(1.6)}{\iff} p \vee p \implies p \quad \checkmark \qquad \text{(doppelte Negation)}$$

zu zeigen: $(\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q) \implies p$

p	q	$(\neg p \to q)$	$(\neg p \to \neg q)$	$(\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$
w	w	w	w	**w**
w	f	w	w	**w**
f	w	w	f	f
f	f	f	w	f

Wenn die linke Seite wahr ist (Spalte ganz rechts),
ist auch die rechte Seite wahr (Spalte ganz links).
Die Zeilen, wo die linke Seite falsch ist, spielen keine Rolle.
Es wurde aber sogar die Äquivalenz gezeigt.

Aufgabe 1.7

a) Betrachten Sie die Aussageform:

$$\forall x \in D\ \exists y \in D : 2 \cdot y = x$$

Setzen Sie für D eine der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ein, sodass diese Aussageform eine wahre Aussage wird, und setzen Sie für D eine dieser Zahlenmengen ein, sodass diese Aussageform eine falsche Aussage wird.

wahre Aussagen (da es zu jedem beliebigen x ein $y = \frac{x}{2}$ gibt):
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : 2 \cdot y = x$
$\forall x \in \mathbb{C}\ \exists y \in \mathbb{C} : 2 \cdot y = x$

falsche Aussagen (da es zu allen ungeraden x kein $y = \frac{x}{2}$ aus der jeweiligen Menge gibt):
$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} : 2 \cdot y = x$
$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : 2 \cdot y = x$

Aufgabe 1.7

b) Versuchen Sie dasselbe wie zuvor mit den Aussageformen:

$$\forall x \in D\ \exists y \in D : 2 \cdot x = y \quad \text{und} \quad \exists x \in D\ \forall y \in D : 2 \cdot x = y$$

Begründen Sie, warum bei diesen beiden Aussageformen immer nur derselbe Wahrheitswert erzielt werden kann.

Die Aussageform $\forall x \in D\ \exists y \in D : 2 \cdot x = y$ ist beim Einsetzen jeder der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wahr, da es zu jedem beliebigen x immer auch ein doppelt so großes y gibt.

Die Aussageform $\exists x \in D\ \forall y \in D : 2 \cdot x = y$ ist hingegen bei jeder der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ falsch, da in keiner der Mengen eine Zahl existiert, deren Doppeltes allen Zahlen der ganzen jeweiligen Menge entspricht.

Aufgabe 1.8

Ordnen Sie die folgenden Bedingungen entsprechend ihrer Schwäche/Stärke an:
$x^2 > 0; x > 0; x > 10, x \geq 10; x < 0$

stark schwach

$$\begin{array}{ccccccc} (x > 10) & \rightarrow & (x \geq 10) & \rightarrow & (x > 0) & \rightarrow & (x^2 > 0) \\ & & & & (x < 0) & \nearrow & \end{array}$$

Aufgabe 1.9

Betrachten Sie die folgenden Prädikate:

$H(x)$: x ist glücklich.

$F(x)$: x ist weiblich.

$L(x, y)$: x liebt y.

Drücken Sie jede Aussage der folgenden Sätze durch formale prädikatenlogische Formeln aus. Sie dürfen ausschließlich die obengenannten Prädikate, die Konstanten Anna und Bernd, das Gleichheitsprädikat und bei Bedarf Variablen x oder y für Quantoren benutzen.

Aufgabe 1.9

a) Anna ist glücklich.
$H(Anna)$

b) Anna liebt Bernd.
$L(Anna, Bernd)$

c) Bernd liebt mehrere Frauen, und seine Liebe zu Anna wird erwidert.
$\exists x \exists y : L(Bernd, x) \wedge F(x) \wedge L(Bernd, y) \wedge F(y) \wedge (x \neq y)$
$\wedge L(Bernd, Anna) \wedge L(Anna, Bernd)$

d) Anna ist glücklich, wenn Bernd sie liebt.
$L(Bernd, Anna) \rightarrow H(Anna)$

e) Anna ist nur glücklich, wenn Bernd sie liebt.
$L(Bernd, Anna) \leftrightarrow H(Anna)$

f) Anna ist nur glücklich, wenn Bernd nur sie liebt.
$\forall x : (L(Bernd, x) \leftrightarrow x = Anna) \leftrightarrow H(Anna)$
Alternativlösung: $\forall x : (((x \neq Anna) \rightarrow$
$\neg L(Bernd, x)) \wedge L(Bernd, Anna)) \leftrightarrow H(Anna)$

Aufgabe 1.10

Gegeben seien die folgenden Prädikate auf der Menge aller Menschen:

- L(x,y): x liebt y
- F(x): x ist weiblich
- M(x): x ist männlich

Beschreiben Sie in einem deutschen Satz, was die folgenden Aussagen bedeuten. Äußern Sie sich dazu, ob Sie die Aussage für stark (schwierig erfüllbar) oder schwach (leicht erfüllbar) halten.

a) $\exists x : M(x) \rightarrow \neg\exists y : F(y) \wedge L(y, x)$
Für mindestens eine Person gilt: Wenn die Person männlich ist, dann gibt es keine Frau, welche diese Person liebt. (*sehr leicht zu erfüllen, gilt automatisch, wenn es wenigstens eine nicht-männliche Person gibt: Für x kann einfach eine solche nicht-männliche Person eingesetzt werden.*)

b) $\exists x : M(x) \wedge \neg\exists y : F(y) \wedge L(y, x)$
Es gibt wenigstens einen Mann, der von keiner Frau geliebt wird. (*leicht zu erfüllen*)

c) $\exists x \exists y : M(x) \wedge \neg F(y) \wedge L(y, x)$
Es gibt wenigstens einen Mann, der von einer Nicht-Frau geliebt wird.
(*leicht zu erfüllen*)

d) $\exists y \exists x : M(x) \wedge \neg F(y) \wedge L(y, x)$
Es gibt wenigstens eine Nicht-Frau, die einen Mann liebt
(*leicht zu erfüllen und äquivalent zu c)*)

e) $\exists x \forall y : M(x) \wedge (\neg F(y) \vee L(y, x))$
Es gibt wenistens einen Mann, der von allen Frauen geliebt wird.
(*schwierig zu erfüllen*)

f) $\forall y \exists x : M(x) \wedge (\neg F(y) \vee L(y, x))$
Jede Frau liebt einen Mann.
(*schwierig zu erfüllen, aber nicht so schwer wie e), denn e) $\rightarrow$ f)*)

Aufgabe 1.11

Sei S die Menge aller Studenten, F die Menge aller Fächer und $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ die Menge aller Klausurnoten.
Gegeben sei das folgende Prädikat:

- $hatKlausurnote(x, y, z)$ bedeutet, dass x die Klausurnote z im Fach y hat.

Beschreiben Sie mit prädikatenlogischen Verknüpfungen, die ausschließlich dieses Prädikat sowie Vergleichsprädikate benutzen, folgende Prädikate:

a) $bestehtKlausur(x, y)$ bedeutet, dass x die Klausur im Fach y besteht.

b) $hatChancen(x)$ bedeutet, dass x mehrere Klausuren besteht.

c) $mindestensSoHart(x, y)$ bedeutet, dass alle Studierenden, die im Fach y durchfallen, auch in x durchfallen.

Verwenden Sie dafür die Charakterisierung, dass man ein Fach besteht, wenn man in der Klausur keine 5 hat, und dass man in einem Fach durchfällt, wenn man in der Klausur eine 5 hat.

a) *bestehtKlausur*(x, y) bedeutet, dass x die Klausur im Fach y besteht.
$\mathit{bestehtKlausur}(x, y) \Leftrightarrow \exists z : \mathit{hatKlausurnote}(x, y, z) \wedge (z \neq 5)$

b) *hatChancen*(x) bedeutet, dass x mehrere Klausuren besteht.
$\mathit{hatChancen}(x) \Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 \exists z_1 \exists z_2 : \mathit{hatKlausurnote}(x, y_1, z_1) \wedge \mathit{hatKlausurnote}(x, y_2, z_2) \wedge (z_1 \neq 5 \neq z_2) \wedge (y_1 \neq y_2)$

c) *mindestensSoHart*(x, y) bedeutet, dass alle Studierenden, die im Fach y durchfallen, auch in x durchfallen.
$\mathit{mindestensSoHart}(x, y) \Leftrightarrow \forall s : \mathit{hatKlausurnote}(s, y, 5) \rightarrow \mathit{hatKlausurnote}(s, x, 5)$

Aufgabe 1.12

Drücken Sie die folgenden Sachverhalte jeweils durch eine prädikatenlogische Verknüpfung aus, die ausschließlich die vier Prädikate aus Aufgabe 1.11 benutzt sowie Vergleichsprädikate:

a) Keiner, der im Brückenkurs durchfällt, hat Chancen.
$\forall x : \neg \mathit{bestehtKlausur}(x, \text{Brückenkurs}) \rightarrow \neg \mathit{hatChancen}(x)$

b) Analysis ist mindestens so hart wie Diskrete Mathematik und Lineare Algebra.
$\mathit{mindestensSoHart}(\text{Analysis}, \text{Diskrete Mathematik}) \wedge$
$\mathit{mindestensSoHart}(\text{Analysis}, \text{Lineare Algebra})$

c) Nur Studierende, die Brückenkurs bestehen, haben Chancen.
$\forall x : \mathit{bestehtKlausur}(x, \text{Brückenkurs}) \leftrightarrow \mathit{hatChancen}(x)$
interpretiert den Satz so, dass alle Studierenden, die den Brückenkurs bestehen, auch Chancen haben, d.h. noch mindestens eine andere Klausur bestehen. Wenn man den Satz so interpretiert, dass nicht gesichert ist, dass all diese Studierenden auch Chancen haben, dann gilt dieselbe Lösung wie in a)

d) Niemand hat in Diskrete Mathematik und Lineare Algebra Noten, die sich um mehr als 2 unterscheiden.
$\forall s \forall z_1 \forall z_2 : hatKlausurnote(s, \text{Diskrete Mathematik}, z_1) \land hatKlausurnote(s, \text{Lineare Algebra}, z_2) \rightarrow \mid z_1 - z_2 \mid \leq 2$

e) Karl ist in Analysis durchgefallen, hat aber Chancen.
$\neg bestehtKlausur(\text{Karl}, \text{Analysis}) \land hatChancen(\text{Karl})$

Sind die 5 Sachverhalte in sich konsistent, d.h. können sie gleichzeitig gelten?

Ja: Karl ist zwar in Analysis durchgefallen, aber er könnte andere Klausuren bestanden haben.

f) Erna hat Diskrete Mathematik und Analysis bestanden, aber leider nicht Lineare Algebra.

$bestehtKlausur(\text{Erna}, \text{Diskrete Mathematik}) \land$
$bestehtKlausur(\text{Erna}, \text{Analysis}) \land \neg bestehtKlausur(\text{Erna}, \text{Lineare Algebra})$

Sind auch alle 6 Sachverhalte in sich konsistent?

Nein: Da Analysis mindestens so hart wie Lineare Algebra ist, Erna aber in Lineare Algebra durchgefallen ist, müsste sie in Analysis auch durchfallen.

Aufgabe 1.13

Linda liest sich den Abschnitt über ihre Beziehungen aufmerksam durch und findet, dass die Autoren das viel zu umständlich beschrieben haben. Sie will in Formel (1.30) darauf verzichten, dass explizit formuliert wird, dass sie Erwin nicht liebt, und stattdessen die Implikation durch eine Äquivalenz ersetzen, also:

$$\Big(\forall u \; (\mathrm{Schwager}(u, \mathrm{Hans}) \wedge (u \neq \mathrm{Erwin})) \leftrightarrow L(\mathrm{Linda}, u)\Big)$$

Ist das wirklich dieselbe Aussage wie in Formel (1.30) oder besteht ein Unterschied?

Nein, das ist eine zu scharfe Aussage: Mit der oben angegeben Formel wird zwar sichergestellt, dass Linda Erwin nicht liebt, aber sie liebt dann auch nur die anderen Schwager von Hans und sonst niemanden mehr auf der Welt. Das wurde in dem ursprünglichen Satz *Linda liebt jeden Schwager von Hans außer Erwin* aber nicht ausgesagt. Dort steht nicht, dass Linda nicht noch jemand anders lieben darf.

a) Stimmt das? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\{N, E, M, O\} = \{O, M, E, N\}$$

Ja, beide Mengen enthalten dieselben 4 Elemente. Es kommt bei der Aufzählung nicht auf die Reihenfolge an.

b) Ist das korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\{N, O, M, E, N\} = \{O, M, E, N\}$$

Ja, beide Mengen enthalten dieselben 4 Elemente. Es kommt bei der Aufzählung nicht auf die Vielfachheit der Erwähnung an (hier wird N zweimal erwähnt).

c) Ist das eine Menge?

$$\{N, O, T, E\} \cup \{\heartsuit, \spadesuit\} \cup \{B, \ddot{A}, U, M, E\}$$

Ja, es handelt sich um die Menge $\{N, O, T, E, \heartsuit, \spadesuit, B, \ddot{A}, U, M\}$. Sie enthält 10 Elemente. Es ist egal, wie unterschiedlich die Elemente in einer Menge sind. Sie müssen nicht alle aus derselben Grundmenge stammen.

Geben Sie folgende Mengen in Elementschreibweise an:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A : x^2 = y\}$

$B = \{-3, -\sqrt{8}, -\sqrt{7}, -\sqrt{6}, -\sqrt{5}, -2, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A : y^2 = x\}$

$C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A : x \cdot y = -x\}$

$D = \{0\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A : y = -x^2 - 1\}$

$E = \{\}$

Aufgabe 2.3

Es sei die folgende Universalmenge $\Omega = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ gegeben. Gegeben seien die folgenden Mengen A, B und C:

$$A = \{p, q, r, s\} \qquad B = \{r, u, w\} \qquad C = \{q, s, t, v\}$$

Geben Sie die Elemente der folgenden Mengen an:

a) $B \cap C = \{\}$
b) $A \cup C = \{p, q, r, s, t, v\}$
c) $\overline{C} = \{p, r, u, w\}$
d) $A \cap B \cap C = \{\}$
e) $(A \cup B) \cap (A \cap C) = \{q, s\}$
f) $\overline{(A \cup B)} = \{t, v\}$
g) $A \setminus C = \{p, r\}$
h) $A \triangle C = \{p, r, t, v\}$
i) $\mathfrak{P}(B) = \{\emptyset, \{r\}, \{u\}, \{w\}, \{r, u\}, \{r, w\}, \{u, w\}, \{r, u, w\}\}$
j) $\mathfrak{P}(A \setminus (B \setminus C)) = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, s\}, \{q, s\}, \{p, q, s\}\}$

Aufgabe 2.4

Bestimmen Sie, ob wahr oder falsch:

a) $\{\} \subseteq \{2, 4, 6\}$ wahr

b) $\{3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ wahr

c) $\{2\} \subseteq \{2, 4, 6\}$ wahr

d) $\{2\} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ falsch

e) $\{1\} \subseteq \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ falsch

f) $\{2, 4, 6\} \subseteq \{\{2\}, 3, 4, \{5\}, 6\}$ falsch

g) $(3, 4) = (4, 3)$ falsch

h) $(1, 2) \in \{(3, 1), (2, 1), (4, 8)\}$ falsch

i) $\{(1, 2), (3, 2)\} \subseteq \{(3, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 8), (3, 2)\}$ wahr

Aufgabe 2.5

Bilden Sie folgende Ergebnismengen und untersuchen Sie jeweils, ob die Menge $\{1\}$ eine Teilmenge oder ein Element der Ergebnismenge ist:

a) $(\{1,2,3\} \cup \emptyset) \times \mathcal{P}(\{1\}) = \{1,2,3\} \times \{\{\},\{1\}\}$
$= \{(1,\{\}),(1,\{1\}),(2,\{\}),(2,\{1\}),(3,\{\}),(3,\{1\})\}$
somit: $\{1\} \notin \textit{Ergebnismenge}$ und $\{1\} \not\subseteq \textit{Ergebnismenge}$

b) $(\{1,2,3\} \times \emptyset) \cup \mathcal{P}(\{1\}) = \{\} \cup \mathcal{P}(\{1\}) = \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset,\{1\}\}$
somit: $\{1\} \in \textit{Ergebnismenge}$ aber $\{1\} \not\subseteq \textit{Ergebnismenge}$

c) $(\{1,2,3\} \cup \emptyset) \cup \mathcal{P}(\{1\}) = \{1,2,3\} \cup \{\{\},\{1\}\}$
$= \{\emptyset,\{1\},1,2,3\}$
somit: $\{1\} \in \textit{Ergebnismenge}$ und $\{1\} \subseteq \textit{Ergebnismenge}$

d) $(\{1,2,3\} \times \emptyset) \times \mathcal{P}(\{1\}) = \emptyset \times \mathcal{P}(\{1\} = \emptyset$
somit: $\{1\} \notin \textit{Ergebnismenge}$ und $\{1\} \not\subseteq \textit{Ergebnismenge}$

Aufgabe 2.6

Stimmen die folgenden Aussagen für eine beliebige Menge M? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \in \mathfrak{P}(M)$

b) $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \subseteq \mathfrak{P}(M)$

Ja. Die Schnittmenge zweier Mengen ist jeweils Teilmenge der beiden Mengen.
Somit ist $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \subseteq \mathfrak{P}(M)$
Und da $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \subseteq M$ ist $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \in \mathfrak{P}(M)$ weil alle Teilmengen von M Elemente von $\mathfrak{P}(M)$ sind.

Beispiel:
$M = \{1, \{1\}\} \implies \mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$
$M \cap \mathfrak{P}(M) = \{\{1\}\}$
$\{\{1\}\} \in \mathfrak{P}(M)$ und $\{\{1\}\} \subseteq \mathfrak{P}(M)$

Aufgabe 2.7

Geben Sie $\{3, 0, 1, 0, 1, 3\} \times \{301, 103, 301\}$ explizit an.

$\{3, 0, 1, 0, 1, 3\} = \{0, 1, 3\}$
$\{301, 103, 301\} = \{103, 301\}$

$\{3, 0, 1, 0, 1, 3\} \times \{301, 103, 301\} = \{0, 1, 3\} \times \{103, 301\}$
$= \{(0, 103), (0, 301), (1, 103), (1, 301), (3, 103), (3, 301)\}$

Aufgabe 2.8

Demonstrieren Sie anhand der Mengen $M_1 = \{1, 2\}$; $M_2 = \{2, 3\}$ und $N = \{a, b, c\}$ das Distributivgesetz für $(M_1 \cup M_2) \times N$, indem Sie die Zwischenergebnisse angeben.

Linke Seite:

$(M_1 \cup M_2) \times N = (\{1, 2\} \cup \{2, 3\}) \times \{a, b, c\}$
$= \{1, 2, 3\} \times \{a, b, c\}$
$= \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$

Rechte Seite:

$(M_1 \times N) \cup (M_2 \times N) = (\{1, 2\} \times \{a, b, c\}) \cup (\{2, 3\} \times \{a, b, c\})$
$= \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$
$\cup \{(2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$
$= \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$

Die linke und rechte Seite sind gleich und damit das Distributivgesetz erfüllt. ✓

Aufgabe 2.9 a)

Jede der folgenden Bedingungen definiert eine Relation auf $\mathbb{Z}$. Entscheiden Sie jeweils, ob die Relation reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv oder linear ist.

a) $x - y$ ist eine ungerade ganze Zahl

- nicht reflexiv, da 0 gerade ist
- symmetrisch, da die Differenz zwischen einer geraden und einer ungeraden Zahl unabhängig von der Reihenfolge ungerade ist
- nicht antisymmetrisch, da bereits symmetrisch aber nicht reflexiv
- nicht transitiv, da x und y dann wieder zwei gerade oder zwei ungerade Zahlen wären
- nicht linear, da immer genau eine gerade und eine ungerade Zahl benötigt werden

b) $x - y$ ist eine gerade ganze Zahl
- reflexiv, da 0 gerade ist
- symmetrisch, da die Differenz zwischen zwei geraden oder zwei ungeraden Zahlen unabhängig von der Reihenfolge gerade ist
- nicht antisymmetrisch
- transitiv, da immer nur entweder gerade oder ungerade Zahlen in Relation stehen
- nicht linear, da eine gerade und eine ungerade Zahl nicht in Relation stehen

Aufgabe 2.9 c)

c) $x * y$ ist eine gerade ganze Zahl

- nicht reflexiv, da das Produkt von zwei ungeraden Zahlen ungerade ist
- symmetrisch, da für die Multiplikation das Kommutativgesetz gilt
- nicht antisymmetrisch
- nicht transitiv: $3 * 4 = 12$, $4 * 5 = 20$, aber $3 * 5 = 15$
- nicht linear, da zwei ungerade Zahlen nicht in Relation stehen

d) x/y ist eine ganze Zahl

- nicht reflexiv, da 0/0 nicht definiert ist
- nicht symmetrisch, da der Kehrwert einer ganzen Zahl nur bei 1 eine ganze Zahl ist
- nicht antisymmetrisch, z.B.: (-3, 3) und (3, -3)
- transitiv, da das ganzzahlige Vielfache von dem ganzzahligen Vielfachen einer Zahl auch das ganzzahlige Vielfache dieser Zahl ist
- nicht linear, z.B. 3 und 7

Aufgabe 2.10

Betrachten Sie die Menge

$$M = \{\text{Berlin}, \text{London}, \text{Deutschland}, \text{Paris}, \text{Frankreich}, \text{Hamburg}\}$$

und die Relation $\sim$ auf M mit:

$$\begin{array}{lll} x \sim y & \Leftrightarrow & x \text{ liegt im Land } y \text{ oder} \\ & & x \text{ enthält als Stadt } y \text{ oder} \\ & & x \text{ liegt im selben Land wie } y \text{ oder} \\ & & x \text{ enthält dieselben Städte wie } y \end{array}$$

Begründen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie eine Aufteilung der Menge M an, die zeigt, welche Elemente zueinander in Relation stehen.

3 Äquivalenzklassen:
$M_{\text{Deutschland}} = \{\text{Deutschland, Berlin, Hamburg}\}$
$M_{\text{England}} = \{\text{London}\}$
$M_{\text{Frankreich}} = \{\text{Frankreich, Paris}\}$

Aufgabe 2.10

Die Relation $\sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und somit eine Äquivalenzrelation:

Reflexivität: Jede Stadt liegt im selben Bundesland, wie sie selbst. Und jedes Land enthält die selben Städte wie es selbst.
$\forall x \in M : x \sim x$

Symmetrie: Wenn eine Stadt in einem Land liegt, enthält dieses Land auch diese Stadt und umgekehrt. Wenn eine Stadt im selben Land wie eine andere Stadt liegt, gilt dies auch umgekehrt. Da eine Stadt immer nur in einem Land liegt, steht kein Land mit einem anderen außer mit sich selbst in Relation, wodurch die Symmetrie automatisch gegeben ist. $\forall x, y \in M : x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

Transitivität: Da jede Stadt eindeutig einem Land zuzuordnen ist, wird auch die Transitivität nicht verletzt.
$\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$

Aufgabe 2.11

Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation R, die aus 3 Äquivalenzklassen besteht. Dabei soll die erste Äquivalenzklasse aus genau einem Element, die zweite aus genau zwei Elementen und die dritte aus genau drei Elementen bestehen. Definieren Sie die Relation $R \subset M \times M$ durch Angabe der Äquivalenzklassen. Geben Sie die Äquivalenzklassen explizit an, und schreiben Sie dann die Relation als Teilmenge des Kreuzprodukts explizit auf.

- $A_1 = \{1\}$
- $A_2 = \{2, 3\}$
- $A_3 = \{4, 5, 6\}$
- $R = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\} \subset M \times M$

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation auf M, welche die Elemente $(1, 3)$ und $(5, 3)$ enthält, aber nicht die Elemente $(1, 2)$ und $(4, 5)$.

  $$R = \{(1,3), (3,1), (5,3), (3,5), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,5), (5,1)\}$$

- Geben Sie die Äquivalenzklassen an.

  $M_1 = \{1, 3, 5\}$
  $M_2 = \{2, 4\}$

Aufgabe 2.12 b)

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation auf M, welche die Elemente $(1, 3)$ und $(5, 3)$ enthält, aber nicht die Elemente $(1, 2)$ und $(4, 5)$.

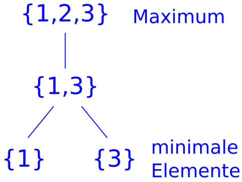
  $$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(5,3),\\ (2,1),(5,4),(2,5),(2,4),(2,3),(1,5),(1,4),(4,3)\}$$

- Zeichnen Sie das entsprechende Hasse-Diagramm.

Aufgabe 2.13

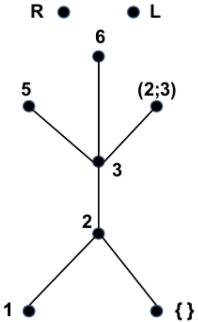
Gegeben sei die Menge $M = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.
Bilden Sie die Relation $\{(x,y) \in M \times M \mid x \subseteq y\}$. Zeigen Sie, dass es sich hier um eine Ordnungsrelation handelt, und zeichnen Sie das zugehörige Hassediagramm.

$\{(x,y) \in M \times M \mid x \subseteq y\} =$
$\{(\{1\},\{1\}), (\{1\},\{1,3\}), (\{1\},\{1,2,3\}),$
$(\{3\},\{3\}), (\{3\},\{1,3\}), (\{3\},\{1,2,3\}),$
$(\{1,3\},\{1,3\}), (\{1,3\},\{1,2,3\}),$
$(\{1,2,3\},\{1,2,3\})\}$



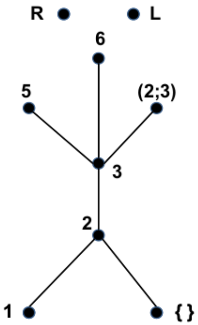
Die Relation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv aber nicht linear und somit eine partielle Ordnungsrelation:

Reflexivität: $\forall x \in M : x \subseteq x$
Antisymmetrie: $\forall x, y \in M : x \subseteq y \wedge y \subseteq x \implies x = y$
Transitivität: $\forall x, y, z \in M : x \subseteq y \wedge y \subseteq z \implies x \subseteq z$
keine Linearität: $\{1\} \not\subseteq \{3\} \wedge \{3\} \not\subseteq \{1\}$



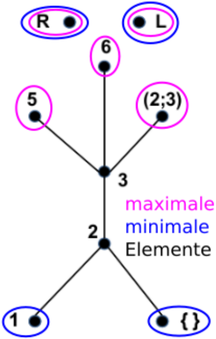
a) Geben Sie die zugehörige Menge M an, für die das Hassediagramm eine Ordnungsrelation beschreibt.

- M = {1, 2, 3, 5, 6, (2;3), {}, R, L}



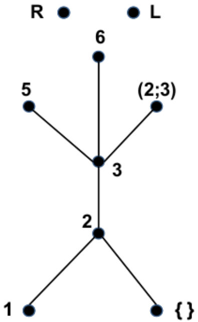
b) Stellen Sie die Ordnungsrelation in Aufzählungsschreibweise (Elementdarstellung) dar. Hinweis: Es sind 26 Elemente.

- $R \subset M \times M = \{(1{,}1), (1{,}2), (1{,}3), (1{,}5), (1{,}(2;3)), (1{,}6), (\{\},\{\}), (\{\},2), (\{\},3), (\{\},5), (\{\},(2;3)), (\{\},6), (2{,}2), (2{,}3), (2{,}5), (2{,}(2;3)), (2{,}6), (3{,}3), (3{,}5), (3{,}(2;3)), (3{,}6), (5{,}5), ((2;3),(2;3)), (6{,}6), (R,R), (L,L)\}$



c) Markieren Sie die minimalen und maximalen Elemente.

Aufgabe 2.14 d)



d) Ist die Ordnungsrelation total oder partiell? Begründen Sie Ihre Antwort. Die Ordnungsrelation ist partiell, da sie nicht linear ist: Nicht jedes Element steht mit jedem anderen in irgendeiner Reihenfolge in Relation zueinander.

Betrachten Sie die Relation $R =$ „ist Teilmenge von" auf $\{E, O, U, H, G\}$, wobei

$$
\begin{aligned}
E &= \{x \mid \exists y : x \text{ ist Elternteil von } y\} \\
O &= \{x \mid \exists y : x \text{ ist Großvater oder Großmutter von } y\} \\
U &= \{x \mid \exists y : x \text{ ist Urgroßvater oder Urgroßmutter von } y\} \\
H &= \{x \mid \exists y : x \text{ und } y \text{ haben genau 1 Elternteil gemeinsam}\} \\
G &= \{x \mid \exists y : x \text{ und } y \text{ haben mindestens 1 Elternteil gemeinsam}\}.
\end{aligned}
$$

E,O,U,H und G sind definiert für alle Menschen, die leben bzw. gelebt haben.
Geben Sie an, ob R total (linear) ist oder nicht. Erstellen Sie ein Hassediagramm und kennzeichnen Sie die maximalen und minimalen Elemente bzw. das Maximum und Minimum.
Tipp: Es ist zu beachten, dass zwar alle Menschen genau zwei Eltern haben, aber nicht notwendigerweise Kinder.

Aufgabe 2.15

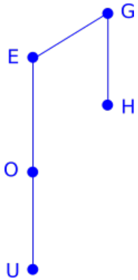
$R =$ „ist Teilmenge von" auf $\{E, O, U, H, G\}$, wobei

$$E = \{x \mid \exists y : x \text{ ist Elternteil von } y\}$$
$$O = \{x \mid \exists y : x \text{ ist Großvater oder Großmutter von } y\}$$
$$U = \{x \mid \exists y : x \text{ ist Urgroßvater oder Urgroßmutter von } y\}$$
$$H = \{x \mid \exists y : x \text{ und } y \text{ haben genau 1 Elternteil gemeinsam}\}$$
$$G = \{x \mid \exists y : x \text{ und } y \text{ haben mindestens 1 Elternteil gemeinsam}\}.$$

G soll die Menge der Geschwister [1] sein und H die Menge der Halbgeschwister.
Auf jeden Fall ist R ist nicht linear, da H in keiner Teilmengenrelation zu E, O und U steht und auch nicht umgekehrt: Jemand, der Kinder hat, muss keine Halbgeschwister haben, und jemand, der Halbgeschwister hat, muss keine Kinder haben.

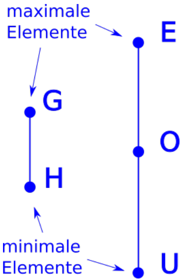
[1] Diese Definition von G ist nicht ganz korrekt, wie später gezeigt wird

Das Hasse-Diagramm hängt davon ab, wie man G interpretiert:
Wenn man die Definition von G so wie in dieser Aufgabe festlegt, dann gehört jeder Mensch zu G, weil er mit sich selbst mindestens 1 Elternteil gemeinsam hat.
Dann ist das die Lösung für das Hasse-Diagramm:



Aufgabe 2.15

Wenn man G dagegen als Menge von Personen definiert, die echte Geschwister haben, und festlegt, dass keiner sein eigener Bruder oder Schwester ist, dann ist das die Lösung für das Hasse-Diagramm:



Aufgabe 2.16

Entscheiden Sie, welche der folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen

- Äquivalenzrelationen sind,
- Halbordnungen oder totale Ordnungen sind,
- Funktionen sind.

Zeigen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist (durch Beweis oder Widerlegung: Sie können dazu natürliche Sprache verwenden).

Aufgabe 2.16 a)

$x \sim y \Longleftrightarrow$

a) Alle Kinder von x sind auch Kinder von y.

- keine Äquivalenzrelation, da nicht symmetrisch: Alle Kinder von x können auch Kinder von y sein. Y kann aber weitere Kinder haben, die nicht von x sind. *(außerdem: reflexiv, nicht transitiv)*
- keine Ordnung, da nicht antisymmetrisch: Ein Elternpaar kann ausschließlich gemeinsame Kinder haben. *(außerdem: nicht linear)*
- keine Funktion, da nicht rechtseindeutig: Es gibt Menschen, die mit mehreren anderen Menschen gemeinsame Kinder haben.

$x \sim y \iff$

b) x ist mit y blutsverwandt, d.h. sie haben einen gemeinsamen Vorfahren innerhalb der letzten 100 Jahre.

- keine Äquivalenzrelation, da nicht transitiv: Die Halbgeschwister x und y können einen gemeinsamen Vater und die Halbgeschwister y und z eine gemeinsame Mutter, aber x und z unterschiedliche Eltern haben.
  (aber: reflexiv und symmetrisch)
- keine Ordnung, da nicht antisymmetrisch: Zwei unterschiedliche Menschen können gemeinsame Vorfahren haben (z.B. Geschwister). *(außerdem: keine Transitivität und keine Linearität)*
- keine Funktion, da nicht rechtseindeutig: Die meisten Menschen haben mehrere Blutsverwandte (z.B. zwei Eltern mit Großeltern innerhalb der letzten 100 Jahre). *(aber: linksvollständig durch Eltern)*

$x \sim y \Longleftrightarrow$

c) x ist mit y in direkter Linie blutsverwandt (einer von beiden ist Vorfahre des anderen).

- keine Äquivalenzrelation, da nicht reflexiv: Niemand ist sein eigener Vorfahre.
  (wenn doch, dann reflexiv und somit Äquivalenzrelation)
  (aber: symmetrisch und nicht transitiv)
- keine Ordnung, da nicht antisymmetrisch: Es sind immer nur zwei unterschiedliche Menschen miteinander in direkter Linie wechselseitig blutsverwandt. *(außerdem: nicht linear)*
- keine Funktion, da nicht rechtseindeutig: Alle Menschen außer Adam und Eva haben mehrere Vorfahren, und Adam und Eva sind die Vorfahren von allen anderen Menschen. *(aber: linksvollständig, da jeder Vorfahren hat, bzw. Adam und Eva Nachkommen haben)*

$x \sim y \iff$

d) x ist mit y verheiratet oder x und y haben gar keinen Ehepartner.

- keine Äquivalenzrelation, da nicht reflexiv: Es gibt (viele) Menschen die einen Ehepartner haben, aber nicht mit sich selbst verheiratet sind. *(aber: symmetrisch und soll in Deutschland transitiv sein)*
- keine Ordnung, da nicht antisymmetrisch: Es sind immer nur zwei unterschiedliche Menschen miteinander wechselseitig verheiratet. *(außerdem: nicht linear, da Verheiratete nur mit dem Ehepartner in Relation stehen)*
- keine Funktion, da nicht rechtseindeutig: Zwar sollte jeder nur mit maximal einem Menschen verheiratet sein, aber Singles können auf mehrere andere Singles treffen. *(aber: linksvollständig, da jeder verheiratet ist, oder keinen Ehepartner hat)*

Aufgabe 2.17

Betrachten Sie die Mengen $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $N = \{a, b, c\}$
Es sei $f : M \to N$ eine Funktion mit $f(1) = a$, $f(2) = b$.

a) Geben Sie weitere Funktionswerte an, so dass f alle Funktionseigenschaften erfüllt.
$f(3) = c$, $f(4) = a$, $f(5) = b$

b) Schreiben Sie f in Relationsdarstellung (als Teilmenge des Kreuzprodukts) auf.
$F \subset M \times N = \{(1,\mathrm{a}), (2,\mathrm{b}), (3,\mathrm{c}), (4,\mathrm{a}), (5,\mathrm{b})\}$

Aufgabe 2.18

Sei

$$P_{\leq} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \leq x^2\}$$

eine Relation auf $\mathbb{R}$.

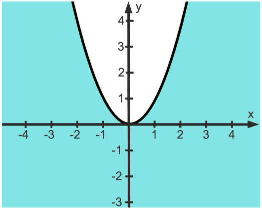
a) Skizzieren Sie $P_{\leq}$ in einem Koordinatensystem.
b) Untersuchen Sie, ob $P_{\leq}$ reflexiv, symmetrisch, transitiv oder antisymmetrisch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.
c) Ist $P_{\leq}$ eine Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Sei

$$P_{\leq} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \leq x^2\}$$

eine Relation auf $\mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie $P_{\leq}$ in einem Koordinatensystem.
- Die Normalparabel und der Bereich darunter bis -∞



Sei

$$P_{\leq} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \leq x^2\}$$

eine Relation auf $\mathbb{R}$.

b) Untersuchen Sie, ob $P_{\leq}$ reflexiv, symmetrisch, transitiv oder antisymmetrisch ist, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- nicht reflexiv, da $\forall x \in \mathbb{R} : (0 < x < 1) \implies x > x^2$
- nicht symmetrisch, da z.B. $2 \leq 5^2$ aber $5 > 2^2$
- nicht transitiv, da z.B. $5 \leq 3^2$ und $3 \leq 2^2$ aber $5 > 2^2$
- nicht antisymmetrisch, da z.B. $2 \leq 3^2$ und $3 \leq 2^2$

Sei

$$P_{\leq} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \leq x^2\}$$

eine Relation auf $\mathbb{R}$.

c) Ist $P_{\leq}$ eine Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Nein. $P_{\leq}$ ist zwar linksvollständig, aber nicht rechtseindeutig: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es unendlich viele $y \in \mathbb{R}$ für die gillt: $y \leq x^2$

Aufgabe 2.19

Betrachten Sie folgende Mengen und begründen Sie, welche eine Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist und welche nicht:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 1\}$
Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da linksvollständig und rechtseindeutig: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$, so dass $x + y = 1$ gilt. Dabei ist $y = 1 - x$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$
Keine Funktion: Nicht linksvollständig, da für $|x| \in \mathbb{R} > 1$ kein $y \in \mathbb{R}$ definiert ist ($y^2 < 0$). Zudem nicht rechtseindeutig, da für $-1 < x < 1$ jeweils zwei y mit unterschiedlichem Vorzeichen existieren.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^3 + y^3 = 1\}$
Funktion, wie bei a) aber mit $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

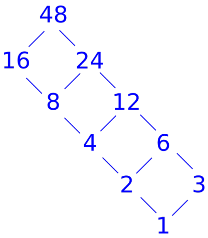
Aufgabe 2.20

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$.
Betrachten Sie die Relation
$R = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$

a) Untersuchen Sie, ob R eine Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation (partiell oder total) ist.

partielle Ordnungsrelation (reflexiv, antisymmetrisch, transitiv, aber nicht linear)

b) Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen oder das Hasse-Diagramm an.
Hier gibt es also ein Hasse-Diagramm (siehe nebenstehend).



Aufgabe 2.20 c)

c) Begründen Sie, warum R keine Funktion ist, und geben Sie eine Teilmenge von R an, die eine Funktion ist.

nicht rechtseindeutig, z.B. $(2, 4)$ und $(2, 6)$

$R' = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (6, 12), (8, 16), (12, 24), (24, 48)\}$

Aufgabe 2.21

Gegeben seien folgende Mengen und Relationen:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$
$$R_1 = \{(1, a); (2, b); (3, c); (4, b); (5, b)\} \quad \subseteq A \times B$$
$$R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (a, 4); (a, 5)\} \quad \subseteq B \times A$$
$$R_3 = \{(1, b); (3, c)\} \quad \subseteq A \times B$$

a) Bilden Sie:

$$R_4 = R_1 \circ R_2 = \{(a,a);\ (a,b);\ (a,c)\}$$
$$R_5 = R_2 \circ R_1 = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5)\}$$
$$R_6 = R_3 \circ R_2 = \{(a,b);\ (a,c)\}$$
$$R_7 = R_2 \circ R_3 = \{\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \; B = \{a, b, c\}$$

b) Geben Sie für jede der 7 Relationen an, ob sie eine Funktion ist und begründen Sie Ihre Antwort.

$R_1 = \{(1, a); (2, b); (3, c); (4, b); (5, b)\}$
linksvollständig und rechtseindeutig $\implies$ Funktion
$R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (a, 4); (a, 5)\}$
weder linksvollständig noch rechtseindeutig $\implies$ keine Funktion
$R_3 = \{(1, b); (3, c)\}$
nicht linksvollständig aber rechtseindeutig $\implies$ keine Funktion
$R_4 = R_1 \circ R_2 = \{(a, a); (a, b); (a, c)\}$
weder linksvollständig noch rechtseindeutig $\implies$ keine Funktion
$R_5 = R_2 \circ R_1 = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5)\}$
weder linksvollständig noch rechtseindeutig $\implies$ keine Funktion
$R_6 = R_3 \circ R_2 = \{(a, b); (a, c)\}$
weder linksvollständig noch rechtseindeutig $\implies$ keine Funktion
$R_7 = R_2 \circ R_3 = \{\}$
nicht linksvollständig aber rechtseindeutig $\implies$ keine Funktion

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \ B = \{a, b, c\}$$

c) Geben Sie ferner an, welche der 7 Relationen injektiv bzw. linkseindeutig und welche surjektiv bzw. rechtsvollständig ist.

$R_1 = \{(1, a); (2, b); (3, c); (4, b); (5, b)\}$
nicht injektiv aber surjektiv
$R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (a, 4); (a, 5)\}$
linkseindeutig und rechtsvollständig, nicht bijektiv, da keine Funktion
$R_3 = \{(1, b); (3, c)\}$
linkseindeutig aber nicht rechtsvollständig
$R_4 = R_1 \circ R_2 = \{(a, a); (a, b); (a, c)\}$
linkseindeutig und rechtsvollständig, nicht bijektiv, da keine Funktion
$R_5 = R_2 \circ R_1 = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5)\}$
linkseindeutig und rechtsvollständig, nicht bijektiv, da keine Funktion
$R_6 = R_3 \circ R_2 = \{(a, b); (a, c)\}$
weder linkseindeutig noch rechtsvollständig
$R_7 = R_2 \circ R_3 = \{\}$
linkseindeutig aber nicht rechtsvollständig

d) Bilden Sie für alle 7 Relationen die Inverse. Ist eine der Relationen eine umkehrbare Funktion?

$$R_1 = \{(1,a);(2,b);(3,c);(4,b);(5,b)\}$$
$$R_1^{-1} = \{(a,1);(b,2);(c,3);(b,4);(b,5)\}$$
$$R_2 = \{(a,1);(a,2);(a,3);(a,4);(a,5)\}$$
$$R_2^{-1} = \{(1,a);(2,a);(3,a);(4,a);(5,a)\}$$
$$R_3 = \{(1,b);(3,c)\}$$
$$R_3^{-1} = \{(b,1);(c,3)\}$$
$$R_4 = R_1 \circ R_2 = \{(a,a);(a,b);(a,c)\}$$
$$R_4^{-1} = \{(a,a);(b,a);(c,a)\}$$
$$R_5 = R_2 \circ R_1 = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5)\}$$
$$R_5^{-1} = \{(1,1);(2,1);(3,1);(4,1);(5,1)\}$$
$$R_6 = R_3 \circ R_2 = \{(a,b);(a,c)\}$$
$$R_6^{-1} = \{(b,a);(c,a)\}$$
$$R_7 = R_2 \circ R_3 = \{\}$$
$$R_7^{-1} = \{\}$$

Nur die Inversen $R_2^{-1}, R_4^{-1}, R_5^{-1}$ sind Funktionen, aber R_1, R_4, R_5 sind keine Funktionen. $\Longrightarrow$ keine umkehrbare Funktion!

Gegeben sind drei Grundmengen

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$N = \{a, b, c, d\}$$
$$P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

a) Definieren Sie zwei Relationen $R_1 \subset M \times N$ und $R_2 \subset N \times P$ so, dass wenigstens eine der beiden keine Funktion ist aber die Komposition $R_2 \circ R_1$ trotzdem eine Funktion ist.

- $R_1 \subset M \times N = \{(1, a); (2, a); (3, b); (4, c); (\mathbf{5}, b); (\mathbf{5}, c)\}$
- $R_2 \subset N \times P = \{(a, 3); (b, 5); (c, 5)\}$

- $R_2 \circ R_1 \subset M \times P = \{(1, 3); (2, 3); (3, 5); (4, 5); (5, 5)\}$

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\} \; N = \{a, b, c, d\} \; P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

b) Definieren Sie Funktionen $f : M \to N$ und $g : N \to P$, sodass f nicht injektiv ist und g nicht surjektiv. Begründen Sie, warum $g \circ f$ weder injektiv noch surjektiv sein kann.

- $F \subset M \times N = \{(1, \mathbf{a}); (2, b); (3, c); (4, d); (5, \mathbf{a})\}$
- $G \subset N \times P = \{(a, 2); (b, 3); (c, 4); (d, 5)\}$

- $G \circ F \subset M \times P = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 2)\}$

Da wegen der fehlenden Injektivität bei F mindestens ein Funktionswert mehrfach abgebildet wird, wird auch bei der Verknüpfung mit G mindestens ein Funktionswert mehrfach abgebildet.
Da wegen der fehlenden Surjektivität bei G nicht alle Funktionswerte von P erreicht werden, werden diese auch bei der Verknüpfung nicht erreicht.

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\} \; N = \{a, b, c, d\} \; P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

c) Definieren Sie Funktionen $f : M \to N$ und $g : N \to P$, sodass f nicht surjektiv ist und g nicht injektiv. Begründen Sie, warum $g \circ f$ weder injektiv noch surjektiv sein kann.

- $F \subset M \times N = \{(1, \mathbf{a}); (2, \mathbf{b}); (3, c); (4, \mathbf{a}); (5, \mathbf{b})\}$
- $G \subset N \times P = \{(a, \mathbf{2}); (b, 3); (c, 4); (d, \mathbf{2})\}$

- $G \circ F \subset M \times P = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 2)\}$

Da N nicht mächtiger ist als M, kann F auch nicht injektiv sein. Da N nicht mächtiger ist als P, kann G auch nicht surjektiv sein. Somit gilt das gleiche wie bei b).

Aufgabe 2.22)

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\} \; N = \{a, b, c, d\} \; P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

d) Verändern Sie die Menge N durch die Hinzunahme von Elementen so, dass Sie zwei Funktionen $f : M \to N$ und $g : N \to P$ definieren können, von der eine nicht injektiv und die andere nicht surjektiv ist, aber die Komposition $g \circ f$ sogar bijektiv ist.
Hinweis: Sie können sich nicht aussuchen, welche der beiden Funktionen nicht injektiv und welche nicht surjektiv ist. Es geht nur in einer Reihenfolge.

- $N = \{a, b, c, d, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$

- $F \subset M \times N = \{(1, a); (2, b); (3, c); (4, d); (5, e)\}$
- $G \subset N \times P = \{(a, 2); (b, 3); (c, 4); (d, 5); (e, 6), \mathbf{(f,2)}\}$

- $G \circ F \subset M \times P = \{(1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 6)\}$

Gegeben sind folgende Funktionen:

Untersuchen Sie diese jeweils auf Injektivität und Surjektivität. Begründen Sie Ihre Aussagen (Nachweis oder Gegenbeispiel!). Geben Sie (falls möglich) die Umkehrfunktion an.

a) $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + x - 2$

$$y = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + x - 2 - y$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2 + y} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + y}$$

$\Longrightarrow$ für $y < -\frac{9}{4}$ nicht definiert $\Longrightarrow$ nicht surjektiv

$\Longrightarrow$ für $y > -\frac{9}{4}$ zwei Urbilder $\Longrightarrow$ nicht injektiv

Gegeben sind folgende Funktionen:

Untersuchen Sie diese jeweils auf Injektivität und Surjektivität. Begründen Sie Ihre Aussagen (Nachweis oder Gegenbeispiel!). Geben Sie (falls möglich) die Umkehrfunktion an.

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $f(x) = \frac{3}{(x+2)} + 1$

$$y = \frac{3}{(x+2)} + 1 \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3}{(x+2)} \underset{x \neq -2}{\Leftrightarrow} (y-1) \cdot (x+2) = 3$$
$$\Leftrightarrow x + 2 = \frac{3}{y-1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{y-1} - 2$$

$\Leftarrow$: Alle Werte $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ werden über $x = \frac{3}{(y-1)} - 2$ mit einem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ erreicht $\to$ surjektiv

$\Rightarrow$: Für jedes $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gibt es nur den eindeutigen Wert $x = \frac{3}{(y-1)} - 2 \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to$ injektiv

$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ mit $f^{-1}(x) = \frac{3}{x-1} - 2$

Aufgabe 2.24

Gegeben seien die Mengen $M = \{a, c, e, g, i\}$ und $N = \{b, d, f, h\}$. Gegeben seien ferner zwei Funktionen $F : M \to N$ und $G : N \to M$.

a) Welche Eigenschaft (injektiv, surjektiv, bijektiv, linksvollständig, rechtseindeutig) hat F garantiert nicht? Welche hat G nicht? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
   $F : M \to N$ kann nicht injektiv sein, da M mächtiger ist als N, also mindestens zwei Elemente von M auf das gleiche Element von N abgebildet werden.
   $G : N \to M$ kann nicht surjektiv sein, da M mächtiger ist als N, also auf mindestens ein Element von M keines von N abgebildet wird.
   Beide Funktionen sind somit auch nicht bijektiv.

b) Konstruieren Sie zwei Funktionen F und G, die wenigstens alle anderen oben genannten Eigenschaften erfüllen.
   $F : M \to N = \{(a, b), (c, d), (e, f), (g, h), (i, h)\}$
   $G : N \to M = \{(b, c), (d, e), (f, g), (h, i)\}$

Aufgabe 2.25

Begründen Sie, warum es in der Theorie keine bijektive Abbildung F : *Personen* $\rightarrow$ *Kalenderdaten* – in Form von (Tag, Monat) – zwischen den Mitgliedern einer Fußballmannschaft und dem zugehörigen Geburtsdatum geben kann.
Kann zumindest theoretisch wenigstens eine der beiden Eigenschaften Injektivität oder Surjektivität erreicht werden?

- $|Kalenderdaten| > |Personen|$ $(366 > 11)$
  Damit kann es nach dem Schubfachprinzip keine surjektive Abbildung geben, da mit nur 11 Personen nicht alle 366 Tage erreicht werden können.
- Wenn alle Mannschaftsmitglieder an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben, ist die Abbildung immerhin injektiv.

Aufgabe 2.26

Zeigen Sie, dass die Menge aller Quadratzahlen und die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig sind.

Zwei (unendliche) Mengen sind gleichmächtig, genau dann, wenn eine bijektive Funktion existiert, die die eine auf die andere abbildet.
Sei M die Menge aller Quadratzahlen, dann ist $f : \mathbb{N} \to M$ mit $f(n) = n^2$ eine bijektive Funktion, mit der alle natürlichen Zahlen auf alle Quadratzahlen abgebildet werden.
Surjektivität: Die Funktion f erreicht nicht alle natürlichen Zahlen, sondern nur die Quadratzahlen. Das ist aber genau M. Also wird jedes Element aus M erreicht.
Injektivität: Sei $f(n) = f(p)$. Dann ist $n^2 = p^2$ und somit $n = p$.
$f(n) = n^2$ ist also eine bijektive Funktion von der Menge der natürlichen Zahlen nach der Menge aller Quadratzahlen und somit sind beide Mengen gleichmächtig.

Aufgabe 2.27

Gegeben sei eine bijektive Abbildung $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ nach dem Cantorschen Diagonalverfahren.
Hierbei enthält $\mathbb{N}$ die Null und $\mathbb{Q}^+$ ist die Menge der positiven rationalen Zahlen.

$$\mathbb{Q}^+ = \{1, \tfrac{1}{2}, 2, 3, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, 4, 5, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{2}, 6, 7, \tfrac{5}{3}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{7}, \ldots\}$$

a) Geben Sie die Elemente $F(5)$, $F(10)$, $F(15)$ und $F(20)$ an.

Da $F(0) = 1$ gilt:
$F(5) = \frac{1}{4}$ $F(10) = \frac{1}{5}$ $F(15) = \frac{5}{2}$ $F(20) = \frac{1}{7}$

b) Bestimmen Sie die Indizes n mit $F(n) = x$ für $x = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3$

$F(6) = \frac{2}{3}$ $F(7) = \frac{3}{2}$ $F(2) = 2$ $F(3) = 3$

Aufgabe 2.28

Geben Sie alle Elemente der Booleschen Schaltfunktionen für $n = 2$ an.

$\mathfrak{B}_2 = \{f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}\} =$
$\{(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (0,1,1,1), (1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,1,1,1)\}$

Hierbei entspricht die erste Position dem Funktionswert von $(0,0)$, die zweite dem von $(0,1)$, die dritte dem von $(1,0)$ und die vierte dem von $(1,1)$. f_0 ist die Nullfunktion und f_{15} die Einsfunktion.

x_1, x_2	$0,0$	$0,1$	$1,0$	$1,1$
f_0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1
f_2	0	0	1	0
f_3	0	0	1	1
f_4	0	1	0	0
f_5	0	1	0	1
f_6	0	1	1	0
f_7	0	1	1	1
f_8	1	0	0	0
f_9	1	0	0	1
f_{10}	1	0	1	0
f_{11}	1	0	1	1
f_{12}	1	1	0	0
f_{13}	1	1	0	1
f_{14}	1	1	1	0
f_{15}	1	1	1	1

Betrachten Sie die Menge der Booleschen Schaltfunktionen für $n = 3$:
Wählen Sie sich zwei beliebige verschiedene Elemente aus und weisen Sie für diese eine der de Morganschen Regeln nach.
Hinweis: Zeigen Sie das Gesetz für alle 8 verschiedenen Argumente der Schaltfunktionen. Es sind also insgesamt 16 Werte auszurechnen (linke und rechte Seite). Geben Sie jeweils die Zwischenwerte an.

Menge der Booleschen Schaltfunktionen für $n = 3$:

$\mathfrak{B} = \{f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

$$\begin{array}{rrcl} \text{i)} & \sim f(x1,x2,x3) & = & 1 - f(x1,x2,x3) \\ \text{ii)} & (f \oplus g)(x1,x2,x3) & = & max\{f(x1,x2,x3), g(x1,x2,x3)\} \\ \text{iii)} & (f \otimes g)(x1,x2,x3) & = & min\{f(x1,x2,x3), g(x1,x2,x3)\} \end{array}$$

Aufgabe 2.29

Sei $p(x_1, x_2, x_3) \mathrel{\widehat{=}} (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$
und $q(x_1, x_2, x_3) \mathrel{\widehat{=}} (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$.

Zu zeigen: $\sim (p \oplus q) = \sim p \otimes \sim q$

linke Seite:

$$p \oplus q \mathrel{\widehat{=}} (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$$
$$\sim (p \oplus q) \mathrel{\widehat{=}} (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

rechte Seite:

$$\sim p \mathrel{\widehat{=}} (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$
$$\sim q \mathrel{\widehat{=}} (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$$
$$\sim p \otimes \sim q \mathrel{\widehat{=}} (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$\sim (p \oplus q) = \sim p \otimes \sim q \quad \checkmark$

a) Zeigen Sie, dass in der Teiler-Algebra für $n = 30$ beide Distributivgesetze für die Elemente 2, 3 und 6 erfüllt sind.

$$T_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$
$$k \oplus l = ggT(k, l)$$
$$k \otimes l = kgV(k, l)$$
$$\sim k = \frac{30}{k}$$

- $p \otimes (q \oplus r) = (p \otimes q) \oplus (p \otimes r)$

  $p := 2 \quad q := 3 \quad r := 6$

  linke Seite: $kgV\big(2, ggT(3, 6)\big) = kgV(2, 3) = 6$

  rechte Seite: $ggT\big(kgV(2, 3), kgV(2, 6)\big) = ggT(6, 6) = 6$

  linke Seite = rechte Seite ✓

b) Demonstrieren Sie die beiden de Morganschen Regeln an den Elementen 3 und 6.

- $\sim(p \oplus q) = (\sim p) \otimes (\sim q)$ für $p := 3$ und $q := 6$

  linke Seite: $\sim(ggT(3,6)) = \sim 3 = \frac{30}{3} = 10$

  rechte Seite: $kgV(\sim 3, \sim 6) = kgV(\frac{30}{3}, \frac{30}{6}) = kgV(10,5) = 10$

  linke Seite $=$ rechte Seite $\checkmark$

- $\sim(p \otimes q) = (\sim p) \oplus (\sim q)$ für $p := 3$ und $q := 6$

  linke Seite: $\sim(kgV(3,6)) = \sim 6 = \frac{30}{6} = 5$

  rechte Seite: $ggT(\sim 3, \sim 6) = ggT(\frac{30}{3}, \frac{30}{6}) = ggT(10,5) = 5$

  linke Seite $=$ rechte Seite $\checkmark$

c) Zeigen Sie, dass die eben gezeigten Ergebnisse auch für $n = 12$ gelten.

$$T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
$$k \oplus l = ggT(k, l)$$
$$k \otimes l = kgV(k, l)$$
$$\sim k = \frac{12}{k}$$

- Distributivgesetz: $p \otimes (q \oplus r) = (p \otimes q) \oplus (p \otimes r)$

  $p := 2 \quad q := 3 \quad r := 6$

  linke Seite: $kgV\big(2, ggT(3, 6)\big) = kgV(2, 3) = 6$

  rechte Seite: $ggT\big(kgV(2, 3), kgV(2, 6)\big) = ggT(6, 6) = 6$

  linke Seite = rechte Seite ✓

c) Zeigen Sie, dass die eben gezeigten Ergebnisse auch für $n = 12$ gelten.

- de Morgansche Regel: $\sim (p \oplus q) = \ (\sim p) \otimes (\sim q)$ für $p := 3$ und $q := 6$

  linke Seite: $\sim (ggT(3,6)) = \sim 3 = \frac{12}{3} = 4$

  rechte Seite: $kgV(\sim 3, \sim 6) = kgV(\frac{12}{3}, \frac{12}{6}) = kgV(4,2) = 4$

  linke Seite $=$ rechte Seite ✓

- de Morgansche Regel: $\sim (p \otimes q) = \ (\sim p) \oplus (\sim q)$ für $p := 3$ und $q := 6$

  linke Seite: $\sim (kgV(3,6)) = \sim 6 = \frac{12}{6} = 2$

  rechte Seite: $ggT(\sim 3, \sim 6) = ggT(\frac{12}{3}, \frac{12}{6}) = ggT(4,2) = 2$

  linke Seite $=$ rechte Seite ✓

c) Warum ist die Teiler-Algebra T_{12} dennoch keine Boolesche Algebra?

12 hat die Primfaktorzerlegung $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Die 2 ist ein doppelter Primfaktor, und daher sind die Gesetze vom inversen Element für die 2 verletzt:

$\sim 2 = \frac{12}{2} = 6$

$2 \oplus \sim 2 = ggT\left(2, 6\right) = 2 \neq 1 \equiv 1$

$2 \otimes \sim 2 = ggT\left(2, 6\right) = 6 \neq 12 \equiv 0$

Aufgabe 3.1

Betrachten Sie die folgenden Aussagen und Begriffe und ordnen Sie ein, was eine Definition, was ein Satz, was ein Axiom und was ein Beweis ist[2]:

a) Eine Boolesche Algebra ist eine Menge mit 3 Operationen und dem Kommutativgesetz, Distributivgesetz, Eigenschaft der neutralen Elemente und Eigenschaft der inversen Elemente.

   ≫ Definition

b) Das Distributivgesetz besagt folgendes:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

   ≫ Definition

[2] Zum Teil können Sie pro Teilaufgabe mehrere Zuordnungen machen.

Aufgabe 3.1

c) Das Distributivgesetz spielt für eine Boolesche Algebra die Rolle Axiom.

d) Die deMorganschen Regeln gelten in einer Booleschen Algebra.

$\gg$ Satz

e) In einer Booleschen Algebra gelten die Regeln der Nullmultiplikation.

$\gg$ Satz

f) Die Teiler-Algebra T_n besteht aus den Teilern der Zahl n sowie 3 Operationen darauf.

$\gg$ Definition

g) Die Teiler-Algebra T_n ist eine Boolesche Algebra, wenn n keine mehrfachen Primfaktoren enthält.

$\gg$ Satz

h) 24 enthält mehrfache Primfaktoren, denn $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

$\gg$ Beweis, Satz

Aufgabe 3.2

Konstruieren Sie eine Nachfolgefunktion σ für $\mathbb{N}$, in der genau 0 und 8 keinen unmittelbaren Vorgänger haben. Welches Peano-Axiom müssen Sie zwingend verletzen?
Versuchen Sie, alle anderen Peano-Axiome weiterhin zu erfüllen.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13...\}$

mit $\sigma = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),$
$(6,7),\mathbf{(7{,}9),(8{,}10)},(9,11),(10,12),(11,13)...\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Axiom 5 muss zwingend verletzt werden: Wenn die 8 keinen unmittelbaren Vorgänger hat, kann sie auch nicht durch eine endlich häufige Anwendung der Nachfolgerlation σ aus 0 erzeugt werden.

Konstruieren Sie eine Menge “natürlicher Zahlen“ derart, dass Peano-Axiom 4 verletzt ist, die anderen aber alle erfüllt sind.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$ *mit* $\sigma \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$

$0 \in \sigma(\mathbb{N})$ Damit ist Axiom 4 verletzt.

Aufgabe 3.4

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

$$\sum_{i=0}^{n} (2^i) = 2^{n+1} - 1$$

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 \qquad \checkmark$$

$$2^{(0+1)} - 1 = 2 - 1 = 1$$

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \underset{i.A.}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1 \checkmark$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

$$\sum_{i=0}^{0} 2^{-i} = 2^0 = 1$$

$$\checkmark$$

$$2 - \frac{1}{2^0} = 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$$

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n+1} 2^{-i} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^{-i} = \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} + 2^{-(n+1)} \underset{I.Ann.}{=} 2 - \frac{1}{2^n} + 2^{-(n+1)}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \checkmark$$

Aufgabe 3.6

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

$$\sum_{i=0}^{n} 4^i = \frac{4^{n+1}-1}{3}$$

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

$$\sum_{i=0}^{0} 4^i = 4^0 = 1$$

$$\checkmark$$

$$\frac{4^{(0+1)}-1}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n+1} 4^i = \frac{4^{n+2}-1}{3}$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 4^i = \sum_{i=0}^{n} 4^i + 4^{n+1} \underset{i.A.}{=} \frac{4^{n+1}-1}{3} + 4^{n+1}$$

$$= \frac{4^{n+1}+3\cdot 4^{n+1}-1}{3} = \frac{4\cdot 4^{n+1}-1}{3} = \frac{4^{n+2}-1}{3} \checkmark$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für eine beliebige Zahl q:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

$$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1$$

$\checkmark$

$$\frac{q^{(0+1)} - 1}{q - 1} = \frac{q - 1}{q - 1} = 1 \quad |q \neq 1$$

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} \underset{i.A.}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1}$$

$$= \frac{q^{n+1}+(q-1)\cdot q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q\cdot q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1} \checkmark$$

Aus welcher Zahlenmenge darf q stammen? $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Aufgabe 3.8

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Wenn n Leute zur Silvesternacht mit Sekt anstoßen und jeder mit seinem Glas das Glas jedes anderen genau einmal berührt, dann gibt es insgesamt $\frac{n(n-1)}{2}$ Gläserkontakte.

1. **Induktionsverankerung** $A(1)$:

Wenn einer alleine ist, gibt es gar keine Gläserkontakte.

$$\frac{1 \cdot (1-1)}{2} = \frac{1 \cdot 0}{2} = \frac{0}{2} = 0 \qquad \checkmark$$

2. **Induktionsschluss** von n auf $n+1$:

zu zeigen:Wenn $n+1$ Leute zur Silvesternacht mit Sekt anstoßen und jeder mit seinem Glas das Glas jedes anderen genau einmal berührt, dann gibt es insgesamt $\frac{(n+1)n}{2}$ Gläserkontakte.

Beweis: Betrachten Sie den Gast Hugo: Hugo stößt mit jedem anderen an, hat also n Gläserkontakte und dann haben alle untereinander auch noch Gläserkontakte ohne Hugo. Die anderen sind n Personen. Nach Induktionsannahme haben sie also untereinander $\frac{n(n-1)}{2}$ Gläserkontakte. Damit gibt es insgesamt $n+\frac{n(n-1)}{2}$ Gläserkontakte.

$$n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2n+n(n-1)}{2}\underset{n\text{ ausklammern}}{=}\frac{(2+(n-1))n}{2}=\frac{(n+1)n}{2}\ \checkmark$$

Aufgabe 3.9

Beweisen Sie: $n!$ ist eine gerade Zahl für $n >= 2$.

1. **Induktionsverankerung** $A(2)$:
$2! = 2$ und die Zahl 2 ist gerade, da 2 offensichtlich durch 2 teilbar ist.✓

2. **Induktionsschluss** von n auf $n+1$:

zu zeigen: $(n+1)!$ ist eine gerade Zahl.

Beweis:
$(n+1)! \underset{\text{Def.}}{=} n! \cdot (n+1)$.
Nach Induktionsannahme ist $n!$ gerade.
Nach Satz 3.11 ist das Produkt einer geraden Zahl mit einer beliebigen ganzen Zahl (hier: $n+1$) wieder gerade.
Damit ist auch $(n+1)!$ wieder gerade. ✓

Aufgabe 3.10

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
Für alle natürlichen Zahlen n gilt: n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme $Q(n)$ durch 3 teilbar ist.
Sie dürfen in Ihrem Beweis folgende Lemmata als wahr voraussetzen:
Lemma 1: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn $n \pm 3$ durch 3 teilbar ist.
Lemma 2: Für alle natürlichen Zahlen n gilt: $Q(n)$ ist genau dann durch 3 teilbar, wenn $Q(n-3)$ durch 3 teilbar ist.

Die Schwierigkeit liegt eher in den Beweisen dieser Lemmata, vor allem im Beweis von Lemma 2. Es wird in der Folgeseite gezeigt, dass bei Voraussetzung dieser Lemmata diese Aufgabe eine einfache Verständnisaufgabe des Induktionsprinzips ist.

Aufgabe 3.10

1. **Induktionsverankerung** für alle Zahlen $n < 10$:
Da für einstellige Zahlen n gilt: $Q(n) = n$, ist die Behauptung trivialerweise erfüllt:
Eine Zahl n ist durch 3 teilbar, wenn $Q(n)$ (also sie selbst) durch 3 teilbar ist. ✓

2. **Induktionsschluss** von $< n$ auf n (verallgemeinertes Induktionsprinzip)

zu zeigen: Die Behauptung gilt für n, wenn sie für alle Zahlen $< n$ gilt.

Beweis:
Nach Lemma 1 ist n genau dann durch 3 teilbar, wenn $n - 3$ durch 3 teilbar ist.
Da $n - 3 < n$ gilt, darf die Induktionsannahme für $n - 3$ vorausgesetzt werden, und es gilt, dass $n - 3$ genau dann durch 3 teilbar ist, wenn $Q(n - 3)$ durch 3 teilbar ist.
Nach Lemma 2 ist das genau dann der Fall, wenn $Q(n)$ durch 3 teilbar ist. Damit ist gezeigt: n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 3 teilbar ist. ✓

Aufgabe 3.11

Beweisen Sie, dass $F(n+2) = 1 + F(0) + \ldots + F(n)$ für die Fibonaccizahlen $F(n)$ und $n \geq 0$ ist.

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

rechte Seite:

$$1 + F(0) = 1 + 0 = 1$$

linke Seite:

$$F(0+2) = F(2) \underset{gem. Def.}{=} F(0) + F(1) = 0 + 1 = 1$$

Beide Seiten sind gleich. ✓

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $F(n+1+2) = 1 + F(0) + \ldots + F(n+1)$

Beweis:

$$F(n+1+2) = F(n+3) \underset{gem.Def.}{=} F(n+2) + F(n+1)$$

$$F(n+2) \underset{i.A.}{=} 1 + F(1) + \ldots + F(n)$$

$$\implies F(n+2) + F(n+1) = 1 + F(1) + \ldots + F(n) + F(n+1) \checkmark$$

Aufgabe 3.12

Eine Bienenkönigin hat als Eltern eine Königin und eine Drohne. Eine Drohne hat als Eltern nur eine Königin (sie entschlüpft einem unbefruchteten Ei).

Die n-te Vorfahrensgeneration einer Biene b sei als Menge von Bienen folgendermaßen definiert:

- Die 0-te Vorfahrensgeneration von b enthält nur die Biene b selbst.
- Die $(n+1)$-te Vorfahrensgeneration von b besteht aus allen Eltern von Bienen der n-ten Vorfahrensgeneration von b. Die 1-te Vorfahrensgeneration sind also die Eltern, die 2-te die Großeltern, u.s.w.

Beweisen Sie durch Induktion über n folgende Sätze:

i) Die n-te Vorfahrensgeneration einer Drohne besteht aus F_{n+1} Bienen.

ii) Die n-te Vorfahrensgeneration einer Königin besteht aus F_{n+2} Bienen.

F steht hierbei für die Fibonaccizahlen.

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Beweis durch vollständige Induktion über n:

1. **Induktionsverankerung** für $n = 0$ und $n = 1$:

   i) Die 0-te Vorfahrensgeneration einer Drohne besteht nur aus der Drohne selbst (1) $\leftrightarrow F_{0+1} = F_1 = 1$ ✓

   Die 1-te Vorfahrensgeneration einer Drohne besteht nur aus einer Königin (1) $\leftrightarrow F_{1+1} = F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$ ✓

   ii) Die 0-te Vorfahrensgeneration einer Königin besteht nur aus der Königin selbst (1) $\leftrightarrow F_{0+2} = F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$ ✓

   Die 1-te Vorfahrensgeneration einer Königin besteht aus einer Königin und einer Drohne (2)
   $\leftrightarrow F_{1+2} = F_3 = F_2 + F_1 = F_1 + F_0 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$ ✓

2. **Induktionsschluss** von n auf $n+1$:

   i) Zu zeigen: Die $n+1$-te Vorfahrensgeneration einer Drohne besteht aus F_{n+2} Bienen.
   Die $n+1$-te Vorfahrensgeneration einer Drohne ist die n-te Vorfahrensgeneration ihrer Eltern, also einer Königin. Diese besteht nach Induktionsannahme aus F_{n+2} Bienen. ✓

   ii) Zu zeigen: Die $n+1$-te Vorfahrensgeneration einer Königin besteht aus F_{n+3} Bienen.
   Die $n+1$-te Vorfahrensgeneration einer Königin ist die n-te Vorfahrensgeneration ihrer Eltern, also einer Königin und einer Drohne. Diese besteht nach Induktionsannahme aus $F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$ Bienen. ✓

Aufgabe 3.13

Gegeben sei die Produktionsregel aus Beispiel 3.10 zur Bildung von Wörtern:

$$\vec{x} \in \mathit{Varname} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \alpha & \text{für } \alpha \in \{a, b, c, \ldots, z\} \\ \vec{x} = \alpha\beta & \text{für } \alpha \in \{a, b, c, \ldots, z\}, \beta \in \{A, B, \ldots, Z\} \\ \vec{x} = \vec{y}\vec{z} & \text{für } \vec{y}, \vec{z} \in \mathit{Varname} \end{cases}$$

Sei n die Länge eines gültigen Variablenwortes.
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über n folgende Sätze:

a) Jeder Variablenname beginnt mit einem Kleinbuchstaben.

b) Es gibt in keinem Variablennamen zwei Großbuchstaben hintereinander.

Satz: Jeder Variablenname $\vec{x}$ mit der Länge n beginnt mit einem Kleinbuchstaben.

Beweis durch vollständige Induktion über n:

1. **Induktionsverankerung** für $n = 1$:
$\vec{x}$ kann nur durch die erste Regel entstanden sein. Dann besteht $\vec{x}$ nur aus einem Kleinbuchstaben und beginnt somit auch mit diesem. ✓

2. **Induktionsschluss** von n auf $n + 1$:

Zu zeigen: Auch ein Variablenwort $\vec{x}$ der Länge $n + 1$ beginnt mit einem Kleinbuchstaben.

Wegen $n \geq 1$ besteht $\vec{x}$ mit der Länge $n + 1$ aus mindestens zwei Buchstaben. Die erste Regel kommt also nicht mehr in Frage.
Es bleiben noch zwei Fälle übrig:

1.Fall:
Wenn $\vec{x}$ durch die zweite Regel entstanden ist, beginnt es mit einem Kleinbuchstaben. ✓

2.Fall:
Wenn $\vec{x}$ durch die dritte Regel entstanden ist, setzt sich $\vec{x}$ aus den Wörtern $\vec{y}$ und $\vec{z}$ zusammen. Da $\vec{z}$ aus mindestens einem Buchstaben besteht, besteht $\vec{y}$ aus höchstens n Buchstaben und beginnt nach Induktionsannahme mit einem Kleinbuchstaben.
Somit beginnt auch $\vec{x}$ mit einem Kleinbuchstaben. ✓

Satz: Es gibt in keinem Variablennamen $\vec{x}$ mit der Länge n zwei Großbuchstaben hintereinander.

Beweis durch vollständige Induktion über n:

1. **Induktionsverankerung** für $n = 1$:
$\vec{x}$ kann nur durch die erste Regel entstanden sein. Dann besteht $\vec{x}$ nur aus einem Kleinbuchstaben und somit liegen keine zwei Großbuchstaben hintereinander. ✓

2. **Induktionsschluss** von n auf $n+1$:

Zu zeigen: Auch in einem Variablenwort $\vec{x}$ der Länge $n+1$ gibt es keine zwei Großbuchstaben hintereinander.

Wegen $n \geq 1$ besteht $\vec{x}$ mit der Länge $n+1$ aus mindestens zwei Buchstaben. Die erste Regel kommt also nicht mehr in Frage.
Es bleiben noch zwei Fälle übrig:

1.Fall:
Wenn $\vec{x}$ durch die zweite Regel entstanden ist, besteht es aus einem Kleinbuchstaben und einem Großbuchstaben und somit nicht aus zwei Großbuchstaben hintereinander. ✓

2.Fall:
Wenn $\vec{x}$ durch die dritte Regel entstanden ist, setzt sich $\vec{x}$ aus den Wörtern $\vec{y}$ und $\vec{z}$ zusammen. Da diese jeweils aus höchstens n Buchstaben bestehen, gibt es in ihnen nach Induktionsanahme jeweils keine zwei Großbuchstaben hintereinander.
Zwei Großbuchstaben können also nur noch Zusammentreffen, wenn $\vec{y}$ mit einem Großbuchstaben endet und $\vec{z}$ mit einem Großbuchstaben beginnt. Da nach 2. a) $\vec{z}$ aber immer mit einem Kleinbuchstaben beginnt, ist dies nicht möglich. ✓

Aufgabe 3.14

Betrachten Sie die Produktionsregel aus Beispiel 3.10 sowie den Satz 3.10, der besagt, dass solche Variablennamen höchstens so viele Großbuchstaben wie Kleinbuchstaben haben:
Erklären Sie, über welche Zwischenresultate der in der Vorlesung geführte Induktionsschluss konkret das Wort `dasIstGut` auf Wörter zurückführt, für die der Satz durch die Induktionsverankerung bewiesen wurde.
Hinweis: Diese Beweiskette ist nicht eindeutig, sondern erlaubt viele verschiedene Antworten.

Aufgabe 3.14

$$\mathtt{dasIstGut} \underset{(3)}{\Longrightarrow} \mathtt{dasIstGu} + \mathtt{t}\ (1)$$

$$\mathtt{dasIstGu} \underset{(3)}{\Longrightarrow} \mathtt{dasIstG} + \mathtt{u}\ (1)$$

$$\mathtt{dasIstG} \underset{(3)}{\Longrightarrow} \mathtt{dasIs} + \mathtt{tG}\ (2)$$

$$\mathtt{dasIs} \underset{(3)}{\Longrightarrow} \mathtt{dasI} + \mathtt{s}\ (1)$$

$$\mathtt{dasI} \underset{(3)}{\Longrightarrow} \mathtt{da} + \mathtt{sI}\ (2)$$

$$\mathtt{da} \underset{(3)}{\Longrightarrow} \mathtt{d}\ (1) + \mathtt{a}\ (1)$$

Aufgabe 3.15

Bei welchen der oben gelösten Induktionsaufgaben wurde das verallgemeinerte Grundprinzip (Schluss von $<= n$ auf $n+1$) verwendet?

Die Aufgaben 3.2 - 3.9, 3.11, 3.12 schlossen direkt vom Vorgänger auf den Nachfolger.
Aufgabe 3.10 schloss von $n-3$ auf n, also nicht vom direkten Vorgänger. In diesem Sinne wurde das verallgemeinerte Prinzip angewendet.
Aufgabe 3.13 benutzte das echte verallgemeinerte Prinzip, vergleichbar mit dem Satz der Existenz der Primfaktorzerlegung; Hier kann man wegen der Kompositionsregel iii) nicht wissen, wie viel kleiner der Vorgänger wirklich war, auf den man die Induktionsannahme anwendet.

Finden Sie den Fehler in dem folgenden Induktionsbeweis:
Satz: Alle Zahlen n sind gleich.
Beweis:
Die Behauptung gelte bis zur Zahl n, also auch $n = n - 1$.
Das ist äquivalent zu: $n + 1 = n$ (Addition von 1 auf beiden Seiten).
Damit ist gezeigt, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt. *q.e.d.*
2ex] Der Induktionsschluss ist vollkommen in Ordnung, aber die Induktionsverankerung fehlt. Und die wird man nie erbringen können, denn es gibt nicht eine einzige Zahl, die gleich ihrem Vorgänger ist.

Aufgabe 3.17

Finden Sie den Fehler in folgendem Induktionsbeweis:
Satz: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.
Beweis: Sei $P(n)$ die Aussage, dass in jeder Ansammlung von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. Offensichtlich ist $P(1)$ wahr.
Im k-ten Induktionsschritt nehmen wir an, dass $P(k)$ wahr sei, und beweisen $P(k+1)$. Dazu betrachten wir eine beliebige Gruppe von $k+1$ Pferden. Schicken wir eines weg, so bleiben k Pferde über, die also alle die gleiche Farbe haben. Holen wir das Pferd zurück und schicken ein anderes weg, so bleiben wieder k Pferde übrig, die dann auch alle die gleiche Farbe haben. Pferde ändern ihre Farbe nicht, also muss dies dieselbe Farbe wie die der ersten Gruppe sein. Somit haben alle $k+1$ Pferde die gleiche Farbe.
Damit gilt $P(k)$ für alle k.
Tipp zur Fehlersuche: Der Induktionsschritt muss für wirklich alle k gelten!

Aufgabe 3.17

Der Beweis ist für $k = 2$ ungültig:
Durch das Wegschicken eines Pferdes landen wir wieder bei $k = 1$ und könnten höchstens erneut die Induktionsverankerung beweisen, jedoch nicht den Induktionsschritt von k zu $k + 1$.
In der Induktionsverankerung müsste auch $k = 2$, also die Farbgleicheit zweier Pferde bewiesen werden.
Dies ist jedoch nicht möglich.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen direkt. Achten Sie darauf, die erforderliche Implikationskette in der richtigen Reihenfolge aufzuschreiben. Hierfür dürfen alle aus der Schule bekannten Regeln für Gleichungs- und Ungleichungsumformungen angewandt werden.

a) Für reelle Zahlen x mit $0 < x < 1$ gilt: $x^2 < x$

$$x < 1 \underset{\bullet x\ (>0)}{\Longrightarrow} x \cdot x = x^2 < x \checkmark$$

b) Für die Gleichung $2x = 3x + 5$ kann es keine andere Lösung geben als $x = -5$.

$$2x = 3x + 5 \underset{-3x}{\Longrightarrow} -x = 5 \underset{\bullet(-1)}{\Longrightarrow} x = -5 \checkmark$$

c) Für die Gleichung $2x = 3x + 5$ ist $x = -5$ eine gültige Lösung.

$x = -5 \underset{\bullet(-1)}{\Longrightarrow} -x = 5 \underset{+3x}{\Longrightarrow} 2x = 3x + 5$ ✓

Auch zulässig: $x = -5 \implies (2x = -10) \land (3x + 5 = -10)$.

Da $-10 = -10 \implies 2x = 3x + 5$ ✓

d) Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen x und y liegt immer eine weitere rationale Zahl.

Definiere $z = \frac{x+y}{2} \in \mathbb{Q}$ wegen $x, y \in \mathbb{Q}$.

$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \underset{\text{wegen } x<y}{<} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = z \underset{\text{wegen } x<y}{<} \frac{y}{2} + \frac{y}{2} = y$ ✓

Aufgabe 3.19

Beweisen Sie die folgenden Aussagen indirekt:

a) Es gibt keine kleinste ganze Zahl.
Gäbe es eine kleinste ganze Zahl, so sei diese y.
Es gilt dann:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : y \leq x \underset{x:=y-1}{\Longrightarrow} y \leq y-1 \underset{-y}{\Longrightarrow} 0 \leq -1 \lightning$$

b) Es gibt keine größte reelle Zahl.
Gäbe es eine größte reelle Zahl, so sei diese y.
Es gilt dann:

$$\forall x \in \mathbb{R} : y \geq x \underset{x:=y+1}{\Longrightarrow} y \geq y+1 \underset{-y}{\Longrightarrow} 0 \geq 1 \lightning$$

c) Es gibt keine kleinste reelle Zahl, die größer als Null ist.
Gäbe es eine kleinste reelle Zahl, größer als Null, so sei diese y.
Es gilt dann:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : y \leq x \underset{x:=\frac{y}{2}}{\Longrightarrow} y \leq \frac{y}{2} \underset{-\frac{y}{2}}{\Longrightarrow} \frac{y}{2} \leq 0 \underset{\cdot 2}{\Longrightarrow} y \leq 0 \lightning$$

Aufgabe 3.20

Beweisen Sie mit dem Schubfachprinzip, dass folgender Sachverhalt gilt:

Unter 70 Studierenden haben mindestens 2 dieselbe Körpergröße in cm.

Geben Sie an, welche Bedingungen Sie an die Körpergröße aller Studierenden stellen müssen, damit dieser Sachverhalt gilt.

Wenn beispielsweise alle Studierenden mindestens 145 cm und höchstens 210 cm groß sind, ist die Menge der möglichen Körpergrößen mit 66 Elementen kleiner als die Menge der Studierenden.
Somit kann eine Abbildung von der Menge der Studierenden auf die Menge der möglichen Körpergrößen nicht injektiv sein, so dass mindestens zwei Studierende dieselbe Körpergröße haben.

Aufgabe 3.21 a)

Es gibt bei der Fussball-WM 32 Mannschaften mit jeweils 11 Spielern pro Mannschaft. Die Mannschaften sind in 8 gleich große Gruppen eingeteilt.

a) Begründen Sie, warum nicht garantiert werden kann, dass mindestens 2 WM-Teilnehmer denselben Geburtstag (in möglicherweise verschiedenen Jahren) haben.

Die Menge der WM-Teilnehmer ist mit $32 \cdot 11 = 352$ Elementen kleiner als die Menge der möglichen Geburtstage mit 366 Elementen. Somit ist eine injektive Funktion von der Menge der Spieler auf die Menge der Geburtstage grundsätzlich möglich, so dass jeder Spieler an einem anderen Tag Geburtstag haben könnte.

b) Üblicherweise haben die Mannschaften mehr als 11 Spieler nominiert. Wie viele Spieler müssen pro Mannschaft nominiert sein, damit garantiert ist, dass mindestens zwei WM-Teilnehmer am selben Tag Geburtstag haben?

Bereits bei 12 Spielern pro Mannschaft ist die Menge der WM-Teilnehmer ist mit $32 \cdot 12 = 384$ Elementen größer als die Menge der möglichen Geburtstage mit 366 Elementen und eine injektive Funktion nicht mehr möglich.

c) Begründen Sie, warum garantiert werden kann, dass auch ohne zusätzlich nominierte Spieler mindestens 2 Teilnehmer in derselben Gruppe im selben Monat Geburtstag haben.

Die 32 Mannschaften sind in 8 gleich große Gruppen mit jeweils $\frac{32}{8} = 4$ Mannschaften und somit $4 \cdot 11 = 44$ Spielern pro Gruppe eingeteilt.
Da die Menge der Spieler mit 44 Elementen größer ist als die Menge der Monate mit 12 Elementen, ist eine injektive Funktion von der Menge der Spieler auf die Menge der Monate nicht möglich.
Mindestens 2 (bzw. sogar mindestens 4) Teilnehmer haben im selben Monat Geburtstag.

Finden Sie Belegungen für die Variablen $x, y \in \mathbb{Z}$, die folgende Prädikate erfüllen:

a) $(x \mid y) \wedge (y \mid (x - y))$

Lösungsmenge: $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x = y\}$, also z. Bsp. $x = y = 1$

b) $((x - y) \mid y) \wedge (y \mid x)$

Lösungsmenge: $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x = 2y\}$, also z. Bsp. $x = 2$ und $y = 1$

c) $(x - 1) \mid (\frac{x}{2})$

$x = 0 \vee x = 2$

Aufgabe 4.2

a) Beweisen Sie, dass die Teilbarkeit eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist, d.h.:$\{(x, y) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) : x|y\}$ ist eine Ordnungsrelation. Beweisen Sie die benötigten Eigenschaften nicht nur in Worten, sondern durch die genaue Anwendung der Definition der Teilbarkeit auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ statt $\mathbb{Z}$. Schreiben Sie dafür die Definition erst einmal auf.

Eine (partielle) Ordnungsrelation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv (aber nicht linear).

Seien x, y zwei beliebige Zahlen aus $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann definieren wir:

$x|y :\iff \exists q \in \mathbb{N} : q \cdot x = y$

Aufgabe 4.2

Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : q \cdot x = x$ mit $q = 1$ ✓

Antisymmetrie:

zu zeigen für beliebige $\forall x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
$(\exists q_1, q_2 \in \mathbb{N} : q_1 \cdot x = y \ \wedge \ q_2 \cdot y = x) \implies x = y$

Sei also $q_1 \cdot x = y$ und $q_2 \cdot y = x \underset{y \text{ ersetzen}}{\implies} q_1 \cdot q_2 \cdot x = x$

$\underset{:x}{\implies} q_1 \cdot q_2 = 1 \underset{q_1, q_2 \in \mathbb{N}}{\implies} q_1 = q_2 = 1 \implies x = y$ ✓

Transitivität:

zu zeigen für beliebige $\forall x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
$(\exists q_1, q_2 \in \mathbb{N} : q_1 \cdot x = y \ \wedge \ q_2 \cdot y = z) \implies (\exists q_3 \in \mathbb{N} : q_3 \cdot x = z)$

$q_1 \cdot x = y \wedge q_2 \cdot y = z \underset{y \text{ ersetzen}}{\implies} q_2 \cdot (q_1 \cdot x) = z \underset{q_3 = q_1 \cdot q_2}{\implies} q_3 \cdot x = z$ ✓

(nicht linear: $\nexists q \in \mathbb{N} : q \cdot 3 = 7 \ \vee \ q \cdot 7 = 3$)

b) Warum ist die Teilbarkeit keine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$?

Weil die Antisymmetrie bei $q = -1$ nicht gegeben ist.

Beispiel: $3|(-3) \quad \wedge \quad (-3)|3 \quad \wedge \quad 3 \neq (-3)$

Beweisen Sie für ganze Zahlen:

a) $m|n_1 \wedge m|n_2 \Rightarrow m|(n_1 + n_2)$

$$
\begin{aligned}
&m|n_1 \iff \exists q_1 \in \mathbb{Z} : q_1 \cdot m = n_1 \\
&m|n_2 \iff \exists q_2 \in \mathbb{Z} : q_2 \cdot m = n_2 \\
&\implies (n_1 + n_2) = q_1 \cdot m + q_2 \cdot m = (q_1 + q_2) \cdot m \\
&q_1 \in \mathbb{Z} \wedge q_2 \in \mathbb{Z} \implies q_3 := (q_1 + q_2) \in \mathbb{Z} \\
&\implies (n_1 + n_2) = q_3 \cdot m \iff m|(n_1 + n_2) \checkmark
\end{aligned}
$$

b) $m|n_1 \wedge m|n_2 \Rightarrow m|(n_1 - n_2)$

$$
\begin{aligned}
&m|n_1 \iff \exists q_1 \in \mathbb{Z} : q_1 \cdot m = n_1 \\
&m|n_2 \iff \exists q_2 \in \mathbb{Z} : q_2 \cdot m = n_2 \\
&\implies (n_1 - n_2) = q_1 \cdot m - q_2 \cdot m = (q_1 - q_2) \cdot m \\
&q_1 \in \mathbb{Z} \wedge q_2 \in \mathbb{Z} \implies q_3 := (q_1 - q_2) \in \mathbb{Z} \\
&\implies (n_1 - n_2) = q_3 \cdot m \iff m|(n_1 - n_2) \checkmark
\end{aligned}
$$

c) $m|n_1 \Rightarrow m|(n_1 \cdot n_2)$

$$m|n_1 \iff \exists q_1 \in \mathbb{Z} : q_1 \cdot m = n_1$$
$$\Longrightarrow n_1 \cdot n_2 = q_1 \cdot m \cdot n_2 = (q_1 \cdot n_2) \cdot m$$
$$q_1 \in \mathbb{Z} \wedge n_2 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow q_2 := (q_1 \cdot n_2) \in \mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow n_1 \cdot n_2 = q_2 \cdot m \iff m|(n_1 \cdot n_2) \checkmark$$

d) Leiten Sie aus a) das folgende Korollar ab:
Eine Zahl n ist durch 3 teilbar genau dann, wenn n plus ein beliebiges Vielfaches von 3 durch 3 teilbar ist.

$$3|n \wedge 3|(3 \cdot k) \underset{a)}{\Rightarrow} 3|(n + 3 \cdot k)$$
$$3|(n + 3 \cdot k) \wedge 3|(-3 \cdot k) \underset{a)}{\Rightarrow} 3|n \checkmark$$

e) Leiten Sie aus b) als weiteres Korollar ab:
Eine Zahl n ist durch 3 teilbar genau dann, wenn n minus ein beliebiges Vielfaches von 3 durch 3 teilbar ist.

$$3|n \wedge 3|3 \cdot k \underset{b)}{\Rightarrow} 3|(n - 3 \cdot k)$$
$$3|(n - 3 \cdot k) \wedge 3|3 \cdot k \underset{a)}{\Rightarrow} 3|n \checkmark$$

Aufgabe 4.4

Beweisen Sie die einzelnen Teile von Satz 4.3. Beschränken Sie sich zur Vereinfachung auf die Aussagen für $\mathbb{N}$. Sie können dann auf die Beträge verzichten.

1) $\forall m, n \in \mathbb{N}: \; m \mid n \wedge n \neq 0 \Longrightarrow m \leq n.$

   $m \mid n \underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N} : n = m \cdot k \quad (*)$

   $n \neq 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} k \neq 0 \underset{k \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} k \geq 1 \underset{(*)}{\Rightarrow} n \geq m \cdot 1 \Leftrightarrow m \leq n \checkmark$

2) $\forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0, m \neq n : \; m \mid n \Longrightarrow m \leq \frac{n}{2}.$

   Beweis durch Kontraposition:

   Es wird gezeigt, dass $\neg(m \leq \frac{n}{2}) \Rightarrow \neg(m \mid n)$

   $m > \frac{n}{2} \underset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2m > n \underset{n \neq 0}{\Rightarrow} \forall k \in \mathbb{N} : k \cdot m > n$

   $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : k \cdot m \neq n \Leftrightarrow \neg(m \mid n) \checkmark$

Beweisen Sie die einzelnen Teile von Satz 4.3. Beschränken Sie sich zur Vereinfachung auf die Aussagen für $\mathbb{N}$. Sie können dann auf die Beträge verzichten.

3) Die einzigen Vielfachen n von m mit $n \leq m$ sind 0 und m.
Falls $m = 0$,
dann ist das einzige Vielfache von m die Zahl $n = 0$✓
Falls $m \neq 0$, dann bedeutet das für ein Vielfaches n:

$$m \mid n \underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N} : n = m \cdot k \quad (*)$$

$$n \leq m \underset{(*)}{\Rightarrow} m \cdot k \leq m \underset{\text{teile durch } m}{\Rightarrow} k \leq 1 \underset{(*)}{\Rightarrow} (n = 0) \vee (n = m)✓$$

4) $\forall p, q, n \in \mathbb{N} : \; p \cdot q = n \Longrightarrow p \leq \sqrt{n} \vee q \leq \sqrt{n}$.
Beweis durch Kontraposition:
Es wird gezeigt, dass $\neg(p \leq \sqrt{n} \vee q \leq \sqrt{n}) \Rightarrow \neg(p \cdot q = n)$

$$p > \sqrt{n} \wedge q > \sqrt{n} \underset{\text{multiplizieren}}{\Rightarrow} p \cdot q > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n \Rightarrow p \cdot q \neq n✓$$

Zeigen Sie durch Fallunterscheidung über die letzte Ziffer von n folgenden Satz über die Quersumme $Q_{10}(n)$:
Für eine natürliche Zahl n mit $2 < n < 100$ gilt:
Wenn $Q_{10}(n-3)$ durch 3 teilbar ist, dann ist auch $Q_{10}(n)$ durch 3 teilbar.

Die Zahl n habe die dezimale Darstellung $n = d_1 \cdot 10 + d_0$ für Ziffern $d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Dann gilt: $Q_{10}(n) = d_1 + d_0$.

Fall i): $d_0 \in \{3, \dots, 9\}$

Dann gilt: $Q_{10}(n-3) = Q_{10}(n) - 3$, da sich $n-3$ und n nur in der letzten Ziffer unterscheiden.
Mit Aufgabe 4.4.e) gilt dann:
$3 \mid Q_{10}(n) \iff 3 \mid Q_{10}(n) - 3 \iff 3 \mid Q_{10}(n-3) \checkmark$.

Aufgabe 4.5

Fall ii): $d_0 \in \{0, 1, 2\}$

Dann unterscheiden sich $n - 3$ und n in der letzten Ziffer um 7, denn $n - 3$ hat dort eine 7 für $d_0 = 0$, eine 8 für $d_0 = 1$ und eine 9 für $d_0 = 1$. In der vorletzten Ziffer unterscheiden sie sich um 1, denn $n - 3$ hat dort die Ziffer $d_1 - 1$. Damit gilt:
$Q_{10}(n - 3) = Q_{10}(n) + 7 - 1 = Q_{10}(n) + 6 = Q_{10}(n) + 2 \cdot 3$.
Mit Aufgabe 4.4.d) gilt dann:
$3 \mid Q_{10}(n) \iff 3 \mid Q_{10}(n) + 2 \cdot 3 \iff 3 \mid Q_{10}(n - 3) \checkmark$.

Um diesen Satz für beliebige n zu beweisen, braucht man eine vollständige Induktion über die Anzahl der Ziffern von n.
Dieser Satz dient als Lemma 2 für Aufgabe 3.10, in dem der Quersummensatz für die Teilbarkeit durch 3 bewiesen wird.
Ein wesentlich allgemeinerer Satz wird in der Seminararbeit von Jörg Porath bewiesen, die sich hier befindet:
`https://intern.fh-wedel.de/fileadmin/mitarbeiter/iw/Lehrveranstaltungen/2020SS/Seminar/`

Belegen Sie den Satz 4.7 mit Beispielen für Teilbarkeit und Nichtteilbarkeit von n für die angegebene Zahlenbasis b:

a) für $b = 9$, $n = 44$ und die Teiler 2, 4, 8

$44 = [48]_9 \Longrightarrow Q_9(44) = 12$

$2 \mid 12$ und $2 \mid 44$, $4 \mid 12$ und $4 \mid 44$, $\neg(8 \mid 12)$ und $\neg(8 \mid 44)$ ✓

b) für $b = 16$, $n = 25$ und die Teiler 3 und 5

$25 = [19]_{16} \Longrightarrow Q_{16}(25) = 10$

$\neg(3 \mid 10)$ und $\neg(3 \mid 25)$, $5 \mid 10$ und $5 \mid 25$, ✓

Aufgabe 4.7

Benutzen Sie Satz 4.9, um folgende Frage zu lösen:
Durch welche Ziffern müssen die Buchstaben a und b ersetzt werden, damit die Zahl 19a9b durch 36 teilbar ist?

Es müssen noch weitere Sätze zur Lösung dieser Aufgabe verwendet werden:
$36 = 4 \cdot 9$, und 4 und 9 sind teilerfremd. Damit gilt nach Satz 4.15.2):
19a9b ist durch 36 teilbar, wenn 19a9b durch 4 und durch 9 teilbar ist.
Nach Satz 4.9 muss die Zahl 9b durch 4 teilbar sein,
und nach Satz 4.6.2) muss $Q_{10}(19a9b)$ durch 9 teilbar sein.
Aus der ersten Bedingung folgt:
$b = 2 \vee b = 6$, denn nur 92 und 96 sind durch 4 teilbar.
Aus der zweiten Bedingung folgt:
$Q_{10}(19a9b) = 1 + 9 + a + 9 + b = 19 + a + b \in \{21 + a, 25 + a\}$ wegen der ersten Bedingung.
Damit gibt es die zwei Lösungen $a = 6$ für $b = 2$ sowie $a = 2$ für $b = 6$.
Beide Zahlen 19692 und 19296 sind durch 36 teilbar.✓

Aufgabe 4.8

Karin ist 25 Jahre alt und ihre Mutter 52. Die Ziffern des Lebensalters der beiden sind also dieselben. Karin fragt sich, ob das noch einmal passieren kann und ob sich immer zwischen 2 Menschen ereignen kann, dass das Alter des einen die Vertauschung der Ziffern des anderen ist. Sie nennt das eine **Zahlendreherverwandtschaft** für Lebensalter, die zweistellig dargestellt werden (einstellige also mit einer führenden Null davor). Sie überlegt sich, was die einzelnen Ziffern für das Gesamtalter bedeuten, und kommt zu folgendem Ergebnis:

a) Damit 2 Menschen eine Zahlendreherverwandtschaft haben können, ist es eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass der Altersunterschied in Jahren zwischen den beiden durch 9 teilbar ist und maximal 81 Jahre beträgt.

b) Das erste Ereignis einer Zahlendreherverwandtschaft zwischen 2 Menschen, welche die Bedingung in a) erfüllen und mehr als ein Jahr auseinander liegen, tritt auf, wenn die ältere Person ihr laufendes Lebensjahrzehnt vollendet und die jüngere Person den Geburtstag erreicht hat, der für die Zahlendreherverwandtschaft benötigt wird. Von da an ergibt sich eine Zahlendreherverwandtschaft alle 11 Jahre, bis die ältere Person kein zweistelliges Alter mehr hat.

zu zeigen: Damit 2 Menschen eine Zahlendreherverwandtschaft haben können, ist es eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass der Altersunterschied in Jahren zwischen den beiden durch 9 teilbar ist und maximal 81 Jahre beträgt.

Es werden die beiden Lebensalter $x = [x_1 x_0]_{10}$ und $y = [y_1 y_0]_{10}$ für $x_i, y_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ betrachtet:
Es gilt also: $x = x_1 \cdot 10 + x_0$ und $y = y_1 \cdot 10 + y_0$.

Falls x und y Zahlendreher sind, gilt $y_1 = x_0$ und $y_0 = x_1$.
Damit gilt:
$x - y = x_1 \cdot 10 + x_0 - x_0 \cdot 10 - x_1 = x_1 \cdot 9 - x_0 \cdot 9 = 9 \cdot (x_1 - x_0)$.
Damit ist die Differenz durch 9 teilbar und die Notwendigkeit dieser Bedingung bewiesen.
Da $x_1 - x_0$ maximal 9 betragen kann, kann die Differenz maximal $9 \cdot 9 = 81$ sein.✓

Falls die Altersdifferenz durch 9 teilbar und maximal 81 ist, dann gilt Folgendes für $x \geq y$ (was immer angenommen werden kann, d.h. x ist das höhere Alter):
$x - y = 9 \cdot k$ für ein gewisses $k \in \{0, \ldots, 9\}$.
Wenn der jüngere Mensch k Jahre alt ist, also $y_1 = 0$ und $y_0 = k$, dann gilt:
$x - y = x_1 \cdot 10 + x_0 - y_1 \cdot 10 - y_0 = x_1 \cdot 10 + x_0 - 0 \cdot 10 - k = x_0 + 10 \cdot x_1 - k = 9 \cdot k \Leftrightarrow x_0 = 10 \cdot (k - x_1)$.
Da $x_0 \in \{0, \ldots, 9\}$, ist das nur möglich, wenn $x_1 = k$ und $x_0 = 0$.
Der ältere Mensch ist also $[k0]_{10} = k \cdot 10$ Jahre alt und hat eine Zahlendreherverwandtschaft zum jüngeren Menschen. Die Bedingung ist also auch hinreichend.$\checkmark$.

Aufgabe 4.8 b)

zu zeigen: Das erste Ereignis einer Zahlendreherverwandtschaft zwischen 2 Menschen, welche die Bedingung in a) erfüllen und mehr als ein Jahr auseinander liegen, tritt auf, wenn die ältere Person ihr laufendes Lebensjahrzehnt vollendet und die jüngere Person den Geburtstag erreicht hat, der für die Zahlendreherverwandtschaft benötigt wird. Von da an ergibt sich eine Zahlendreherverwandtschaft alle 11 Jahre, bis die ältere Person kein zweistelliges Alter mehr hat.

Es wurde bereits in a) gezeigt, dass die erste Zahlendreherverwandtschaft erreicht wird, wenn der jüngere Mensch k Jahre alt geworden ist, wobei k der Faktor von 9 ist, um den sich die Lebensalter der beiden Menschen unterscheiden. Der ältere Mensch ist dann $10 \cdot k$ Jahre alt, vollendet also sein laufendes Lebensjahrzehnt. ✓

Wenn zwei Menschen eine Zahlendreherverwandtschaft haben, d.h. der erste ist $x_1 \cdot 10 + x_0$ Jahre alt und der zweite $x_0 \cdot 10 + x_1$ Jahre alt, dann erhöhen sich beide Ziffern in 11 Jahren um genau 1, d.h. sie sind wieder wechselseitig dieselben:
Nach 11 Jahren ist der erste $(x_1 + 1) \cdot 10 + (x_0 + 1)$ Jahre alt und der zweite $(x_0 + 1) \cdot 10 + (x_1 + 1)$ Jahre alt.
Beim Verlassen eines zweistelligen Alters gilt nicht mehr, dass sich beide Ziffern um 1 erhöhen. Daher endet dann die Serie. ✓

Formulieren Sie b) um für Menschen, die an ganzen Lebensjahren gleich alt sind.

Wenn zwei Menschen an ganzen Lebensjahren gleich alt sind, dann ist die Differenz der Lebensjahre ebenfalls ein Vielfaches von 9, nämlich 0 Jahre. Der Faktor k von 9 ist dann 0.
Gemäß der Beweise oben besteht dann die erste Zahlendreherverwandtschaft, wenn beide auf der Welt sind und von da an alle 11 Jahre, also bei allen Vielfachen von 11. Da sie gleich alt sind, muss die erste Ziffer des Alters gleich der zweiten sein.
Im Gegensatz zur Charakterisierung von b) beginnt allerdings die erste Zahlendreherverwandtschaft nicht, wenn der Ältere sein laufendes Lebensjahrzehnt erreicht hat, sondern wenn der Jüngere geboren wurde.

Aufgabe 4.8 Herausforderung

Analog zu oben kann man zeigen: Damit 2 Menschen eine Zahlendreherverwandtschaft zur Basis b haben können, ist es eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass der Altersunterschied in Jahren zwischen den beiden durch $b-1$ teilbar ist und maximal $(b-1)^2$ Jahre beträgt.

Beweis analog zu a):
Es werden die beiden Lebensalter $x = [x_1 x_0]_b$ und $y = [y_1 y_0]_b$ für $x_i, y_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ betrachtet:
Es gilt also: $x = x_1 \cdot b + x_0$ und $y = y_1 \cdot b + y_0$.

Falls x und y Zahlendreher sind, gilt $y_1 = x_0$ und $y_0 = x_1$.
Damit gilt: $x - y = x_1 \cdot b + x_0 - x_0 \cdot b - x_1 =$
$x_1 \cdot (b-1) - x_0 \cdot (b-1) = (b-1) \cdot (x_1 - x_0)$.
Damit ist die Differenz durch $b-1$ teilbar und die Notwendigkeit dieser Bedingung bewiesen.
Da $x_1 - x_0$ maximal $b-1$ betragen kann, kann die Differenz maximal $(b-1) \cdot (b-1) = (b-1)^2$ sein.✓

Falls die Altersdifferenz durch $b-1$ teilbar und maximal $(b-1)^2$ ist, dann gilt Folgendes für $x \geq y$ (was immer angenommen werden kann, d.h. x ist das höhere Alter):
$x - y = (b-1) \cdot k$ für ein gewisses $k \in \{0, \dots, b-1\}$.
Wenn der jüngere Mensch k Jahre alt ist, also $y_1 = 0$ und $y_0 = k$, dann gilt:
$x - y = x_1 \cdot b + x_0 - y_1 \cdot b - y_0 = x_1 \cdot b + x_0 - 0 \cdot b - k =$
$x_0 + b \cdot x_1 - k = b \cdot k \Leftrightarrow x_0 = b \cdot (k - x_1)$.
Da $x_0 \in \{0, \dots, b-1\}$, ist das nur möglich, wenn $x_1 = k$ und $x_0 = 0$. Der ältere Mensch ist also $[k0]_b = k \cdot b$ Jahre alt und hat eine Zahlendreherverwandtschaft zum jüngeren Menschen. Die Bedingung ist also auch hinreichend.$\checkmark$.

Kann man dann durch die Wahl einer geeigneten Zahlenbasis eine Zahlendreherverwandtschaft zwischen 2 beliebigen Menschen herstellen?

Ja, das geht nach den Überlegungen oben:
Sei die Differenz der Lebensalter d. Dann kann ein beliebiger Teiler t von d genommen werden (notfalls d selbst), und es besteht eine Zahlendreherverwandtschaft zu Basis $b = t + 1$: Denn die Differenz ist durch $b - 1$ teilbar.
Beispiel: $d = 30$. Damit kann der Teiler 10 genommen werden, und es besteht eine Zahlendreherverwandtschaft zur Basis 11, wenn der Jüngere $3 = [03]_{11}$ Jahre alt ist. Der Ältere ist dann $33 = [30]_{11}$ Jahre alt. Das wiederholt sich alle 12 Jahre: Beim nächsten Mal ist der Jüngere $15 = [14]_{11}$ Jahre alt und der Ältere $45 = [41]_{11}$ Jahre alt. Im Allgemeinen Fall wiederholt sich die Zahlendreherverwandtschaft alle $b + 1$ Jahre, in diesem Fall also alle $t + 2 = 12$ Jahre.

Wenn die Differenz eine Primzahl ist, also zum Beispiel $d = 31$, dann muss als Zahlenbasis diese Primzahl $+1$, also hier die 32, genommen werden. Die erste Zahlendreherverwandtschaft entsteht dann, wenn der Jüngere $1 = [01]_{32}$ Jahr alt ist und der Ältere $32 = [10]_{32}$ Jahre alt ist, und die nächste, wenn der Jüngere $34 = [12]_{32}$ Jahre alt ist und der Ältere $65 = [21]_{32}$ Jahre alt ist.

Wenn mehrere Teiler t möglich sind, so hat ein kleiner Teiler t den Vorteil, dass sich die Zahlendreherverwandtschaft häufig wiederholt, nämlich alle $t + 2$ Jahre. Allerdings ist spätestens mit dem Lebensalter $(t + 1)^2$ Jahre Schluss, weil die Alterszahl dann dreistellig wird. Ein großer Teiler hat entsprechend den Nachteil, dass sich die Zahlendreherverwandtschaft nicht so häufig wiederholt (im Beispiel oben nur alle 33 Jahre), aber dafür können die beiden Menschen sehr alt werden und dennoch zahlendreherverwandt bleiben (im Beispiel oben bis zu 1023 Jahre).

Berechnen Sie jeweils (i) a DIV b sowie (ii) a MOD b:

a) $a = -17, b = 6$

b) $a = -17, b = -6$

c) $a = 17, b = -6$

d) $a = 17, b = 6$

$$
\begin{array}{lrclrcl}
\text{a)} & -17 \text{ DIV } 6 & = & -3 & -17 \text{ MOD } 6 & = & 1 \\
 & & & & \text{denn } -17 & = & -3 \cdot 6 + 1 \\
\text{b)} & -17 \text{ DIV } -6 & = & 3 & -17 \text{ MOD } -6 & = & 1 \\
 & & & & \text{denn } -17 & = & 3 \cdot (-6) + 1 \\
\text{c)} & 17 \text{ DIV } -6 & = & -2 & 17 \text{ MOD } -6 & = & 5 \\
 & & & & \text{denn } 17 & = & -2 \cdot (-6) + 5 \\
\text{d)} & 17 \text{ DIV } 6 & = & 2 & 17 \text{ MOD } 6 & = & 5 \\
 & & & & \text{denn } 17 & = & 2 \cdot 6 + 5
\end{array}
$$

Beweisen Sie den folgenden Satz, aus dem die Gültigkeit des Euklidischen Algorithmus folgt: Für $n = q \cdot m + r$ gilt (wobei $n, q, m \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}$):
Sei $T(x, y)$ die Menge aller gemeinsamen Teiler von x und y. Dann gilt: $T(m, n) = T(m, r)$
Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes Element aus der einen Menge in der anderen liegt und umgekehrt.

Bemerkung: $n = q \cdot m + r \Leftrightarrow r = n - q \cdot m$

Sei $x \in T(m, n)$, d.h. es gilt:$x \mid m \wedge x \mid n$

$x \mid m \wedge q \in \mathbb{Z} \underset{\text{Satz 4.2,3)}}{\Longrightarrow} x \mid q \cdot m$

$x \mid n \wedge x \mid q \cdot m \underset{\text{Satz 4.2,2)}}{\Longrightarrow} x \mid (n - q \cdot m) \underset{\text{Bemerkung oben}}{\Longrightarrow} x \mid r$

Da alle gemeinsamen Teiler von m und n auch r teilen, ist $T(m, n)$ eine Teilmenge von $T(m, r)$.

Aufgabe 4.10

Sei $y \in T(m, r)$, d.h. es gilt: $y \mid m \wedge y \mid r$

$y \mid m \wedge q \in \mathbb{Z} \underset{\text{Satz 4.2,3)}}{\Longrightarrow} y \mid q \cdot m$

$y \mid q \cdot m \wedge y \mid r \underset{\text{Satz 4.2,1)}}{\Longrightarrow} y \mid (q \cdot m + r) \Longrightarrow y \mid n$

Da alle gemeinsamen Teiler von m und r auch n teilen, ist $T(m, r)$ eine Teilmenge von $T(m, n)$.

$T(m, n) \subseteq T(m, r) \wedge T(m, r) \subseteq T(m, n)$
$\Longrightarrow T(m, n) = T(m, r)$ ✓

Aufgabe 4.11

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von n und m mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, wobei:
$n = -190.476$ und $m = 29.172$
Geben Sie auch das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m an.

Es reicht aus, mit den Beträgen zu arbeiten. Das Vorzeichen kann weggelassen werden.

$190.476 = 6 \cdot 29.172 + 15.444$

$29.172 = 1 \cdot 15.444 + 13.728$

$15.444 = 1 \cdot 13.728 + 1.716$

$13.728 = 8 \cdot 1.716 + 0$

$ggT(-190.476, 29.172) = 1.716$

$kgV(-190.476, 29.172) = \frac{190.476 \cdot 29.172}{1.716} = 3.238.092$

Aufgabe 4.12a)

Testen Sie durch Probedivision, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind:

$$299, 997, 1301, 2183$$

Testen Sie keine überflüssigen Teilerkandidaten. Sie dürfen für die Probedivisionen einen Taschenrechner einsetzen.

- $299 = 13 \cdot 23 \implies$ keine Primzahl
- $\nexists q \in \mathbb{N} : 1 < q \leq 31 \ \wedge \ q | 997 \implies$ Primzahl $(32^2 > 997)$
- $\nexists q \in \mathbb{N} : 1 < q \leq 36 \ \wedge \ q | 1301 \implies$ Primzahl $(37^2 > 1301)$
- $2183 = 37 \cdot 59 \implies$ keine Primzahl

Aufgabe 4.12b)

Testen Sie durch Probedivision, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind:

$$511, 1009, 1511, 2009$$

Testen Sie keine überflüssigen Teilerkandidaten. Sie dürfen für die Probedivisionen einen Taschenrechner einsetzen.

- $511 = 7 \cdot 73 \implies$ keine Primzahl
- $\nexists q \in \mathbb{N} : 1 < q \leq 31 \ \wedge \ q | 1009 \implies$ Primzahl $(32^2 > 1009)$
- $\nexists q \in \mathbb{N} : 1 < q \leq 38 \ \wedge \ q | 1511 \implies$ Primzahl $(39^2 > 1511)$
- $2009 = 7 \cdot 287 \implies$ keine Primzahl

  287 ist kein Primfaktor, aber das ist hierfür irrelevant.

Aufgabe 4.13

Betrachten Sie die Menge aller Primzahlen bis jeweils 200, 400, 600 und 1000 und vergleichen Sie ihre Anzahl mit der logarithmischen Abschätzung aus Satz 4.22.
Hinweis: Besorgen Sie sich die Primzahlen entweder mit dem Sieb des Eratosthenes oder aus dem Internet. Für die logarithmische Abschätzung sollten Sie nicht alle Primzahlen von 2 bis zur oberen Grenze n betrachten, sondern nur von $n - m$ bis n für eine Zahl m, die deutlich kleiner ist als n. Sie werden sehen, dass dann die Abschätzung wesentlich genauer ist. Warum ist das so?

Aufgabe 4.13

Menge aller Primzahlen bis 1000 =

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71,$
$73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149,$
$151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199,$

$211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283,$
$293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383,$
$389, 397,$

$401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487,$
$491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593,$
$599,$

$601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683,$
$691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797,$

$809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887,$
$907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997\}$

Aufgabe 4.13

- $\pi(200) = 46 \quad \frac{200}{\ln 200} = 38$
- $\pi(400) = 78 \quad \frac{400}{\ln 400} = 67$
- $\pi(600) = 109 \quad \frac{600}{\ln 600} = 94$
- $\pi(800) = 139 \quad \frac{800}{\ln 800} = 120$
- $\pi(1000) = 168 \quad \frac{1000}{\ln 1000} = 145$

Die logarithmische Abschätzung von 2 bis zu einer Schranke n gibt grundsätzlich weniger Primzahlen an, als tatsächlich existieren. Der Grund besteht darin, dass die ersten Primzahlen deutlich dichter beeinander liegen, weil sie die logarithmische Abschätzung für die kleinere Schranke erfüllen müssen.

Es ist daher besser, wenn man nur die letzten m Zahlen vor der Schranke n betrachtet und dann m durch diese Schranke teilt. Je kleiner m im Vergleich zu n ist, desto genauer wird die Schranke (siehe nächste Seite für $m = 200$).

$m = 200$

- $\pi(200) = \mathbf{46}$ $\quad \frac{200}{\ln 200} = \mathbf{38}$
- $\pi(400) - \pi(200) = 78 - 46 = \mathbf{32}$ $\quad \frac{200}{\ln 400} = \mathbf{33{,}38}$
- $\pi(600) - \pi(400) = 109 - 78 = \mathbf{31}$ $\quad \frac{200}{\ln 600} = \mathbf{31{,}26}$
- $\pi(800) - \pi(600) = 139 - 109 = \mathbf{30}$ $\quad \frac{200}{\ln 800} = \mathbf{29{,}92}$
- $\pi(1000) - \pi(800) = 168 - 139 = \mathbf{29}$ $\quad \frac{200}{\ln 1000} = \mathbf{28{,}95}$

Wie man sieht, ist die Abschätzung für die letzten 200 Primzahlen ab $n = 600$ schon sehr genau. Sie kann nicht mehr besser werden, da die Abweichung kleiner als 1 ist. Diese Genauigkeit besteht auch bei sehr großen Primzahlen. Allerdings muss man m genügend groß lassen, um nicht in eine zufällig größere Lücke zwischen Primzahlen zu stoßen.

Beispiel (durch Computeralgebrasystem verifiziert): Unter den letzten 10000 Zahlen vor 10^{500} finden sich 8 Primzahlen, und die logarithmische Schranke ergibt $8,69$.

Aufgabe 4.14

Im Beweis, dass es nicht nur endlich viele Primzahlen gibt, wird gezeigt, dass das Produkt aller (fälschlich angenommenen) endlich vielen Primzahlen $+1$ wieder eine Primzahl sein muss. Lösen Sie folgende Aufgabe:
Seien $p_1 \dots p_n$ die ersten n Primzahlen $(2, 3, 5, \dots)$. Finden Sie durch Ausprobieren ein n bzw. ein p_n, so dass

$$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) + 1$$

(also das Produkt der ersten n Primzahlen $+1$) keine Primzahl ist.

Überlegen Sie sich, warum das kein Widerspruch zum oben zitierten Beweis ist.

Für $n = 6$ gilt:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031$$

$30.031 = 59 \cdot 509 \implies$ keine Primzahl

Die Primfaktoren 59 und 509 liegen außerhalb der Menge $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \implies$ kein Widerspruch zum Beweis.

Aufgabe 4.15 a)

a) Demonstrieren Sie an jeweils einem anderen Beispiel als auf Seite 169, dass die Definition von $\oplus$ und $\odot$ für $\mathbb{Z}_m$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten für die Restklasse ist.

$11 \in [\mathbf{4}]_7 \wedge -16 \in [\mathbf{5}]_7 \wedge 11 - 16 = -5 \in [\mathbf{4+5}]_7 = [9]_7 = [2]_7$

$7 \in [\mathbf{2}]_5 \wedge -2 \in [\mathbf{3}]_5 \wedge 7 \cdot (-2) = -14 \in [\mathbf{2 \cdot 3}]_5 = [6]_5 = [1]_5$

b) Beweisen Sie diesen Sachverhalt über die Definition der Restklasse (siehe Satz 4.28).

Es seien $m, q, r \in \mathbb{Z}$, wobei $0 \leq r < |m|$ und

$$i^* = q_{i^*} \cdot m + r_{i^*}$$
$$i = q_i \cdot m + r_i$$
$$k^* = q_{k^*} \cdot m + r_{k^*}$$
$$k = q_k \cdot m + r_k$$

$$i^* \in [i]_m \implies r_{i^*} = r_i$$
$$k^* \in [k]_m \implies r_{k^*} = r_k$$

Aufgabe 4.15 b)

Zu zeigen: $i^* \in [i]_m \wedge k^* \in [k]_m \implies i^* + k^* \in [i+k]_m$

$$i^* + k^* = q_{i^*} \cdot m + r_i + q_{k^*} \cdot m + r_k = (q_{i^*} + q_{k^*}) \cdot m + r_i + r_k$$

$$i + k = q_i \cdot m + r_i + q_k \cdot m + r_k = (q_i + q_k) \cdot m + r_i + r_k$$

Damit haben $i^* + k^*$ und $i + k$ denselben Rest $r_i + r_k$ zu m und liegen somit in derselben Restklasse $\checkmark$

Zu zeigen: $i^* \in [i]_m \wedge k^* \in [k]_m \implies i^* \cdot k^* \in [i \cdot k]_m$

$$i^* \cdot k^* = (q_{i^*} \cdot m + r_i) \cdot (q_{k^*} \cdot m + r_k) =$$
$$q_{i^*} \cdot q_{k^*} \cdot m^2 + r_i \cdot q_{k^*} \cdot m + q_{i^*} \cdot r_k \cdot m + r_i \cdot r_k =$$
$$(q_{i^*} \cdot q_{k^*} \cdot m + r_i \cdot q_{k^*} + q_{i^*} \cdot r_k) \cdot m + r_i \cdot r_k$$

$$i \cdot k = (q_i \cdot m + r_i) \cdot (q_k \cdot m + r_k) =$$
$$q_i \cdot q_k \cdot m^2 + r_i \cdot q_k \cdot m + q_i \cdot r_k \cdot m + r_i \cdot r_k =$$
$$(q_i \cdot q_k \cdot m + r_i \cdot q_k + q_i \cdot r_k) \cdot m + r_i \cdot r_k$$

Damit haben $i^* \cdot k^*$ und $i \cdot k$ denselben Rest $r_i \cdot r_k$ zu m und liegen somit in derselben Restklasse $\checkmark$

Aufgabe 4.16

Zeigen Sie jeweils an einem Beispiel, dass $[a]_m \cdot [b]_n$ und $[a]_m + [b]_n$ für $n \neq m$ nicht wohldefiniert werden kann.

$7 \in [2]_5 \wedge 13 \in [6]_7 \wedge 7 \cdot 13 = 91 \in [1]_5 \wedge 91 \in [0]_7$

$2 \cdot 6 = 12 \in [2]_5 \wedge 12 \in [5]_7$

$1 \neq 0 \neq 2 \neq 5$

$7 \in [2]_5 \wedge 13 \in [6]_7 \wedge 7 + 13 = 20 \in [0]_5 \wedge 20 \in [6]_7$

$2 + 6 = 8 \in [3]_5 \wedge 8 \in [1]_7$

$0 \neq 6 \neq 3 \neq 1$

Finden Sie von folgenden Elementen das additiv und multiplikativ Inverse (falls es existiert). Geben Sie das gesuchte Element in normierter Darstellung an (also als Repräsentanten zwischen 0 und $n-1$).

a) 10 in $\mathbb{Z}_{21}$ b) 9 in $\mathbb{Z}_{21}$ c) 8 in $\mathbb{Z}_{25}$ d) 21 in $\mathbb{Z}_{27}$

additiv Inverse:

a) $[10]_{21}^{-1} = [11]_{21}$

b) $[9]_{21}^{-1} = [12]_{21}$

c) $[8]_{25}^{-1} = [17]_{25}$

d) $[21]_{27}^{-1} = [6]_{27}$

multiplikativ Inverse:

a) $[10]_{21}^{-1} = [19]_{21}$

$10 \cdot 19 = 9 \cdot 21 + 1$

b) $[9]_{21}^{-1}$ nicht vorh.

ggT $(9,21) \neq 1$

c) $[8]_{25}^{-1} = [22]_{25}$

$8 \cdot 22 = 7 \cdot 25 + 1$

d) $[21]_{27}^{-1}$ nicht vorh.

ggT $(21,27) \neq 1$

Erstellen Sie die Verknüpfungstabellen für $+$ und $*$ in $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_8$ und geben Sie für jedes Element jeweils das Inverse bezüglich der jeweiligen Verknüpfung an (falls es eins gibt).

Verknüpfungstabellen $\mathbb{Z}_2, \oplus, \otimes$:

$\oplus_2$	0	1	x^{-1}
0	0	1	0
1	1	0	1

$\odot_2$	0	1	x^{-1}
0	0	0	–
1	0	1	1

Verknüpfungstabellen $\mathbb{Z}_3, \oplus, \otimes$:

$\oplus_3$	0	1	2	x^{-1}
0	0	1	2	0
1	1	2	0	2
2	2	0	1	1

$\odot_3$	0	1	2	x^{-1}
0	0	0	0	–
1	0	1	2	1
2	0	2	1	2

Verknüpfungstabellen $\mathbb{Z}_4, \oplus, \otimes$:

$\oplus_4$	0	1	2	3	x^{-1}
0	0	1	2	3	0
1	1	2	3	0	3
2	2	3	0	1	2
3	3	0	1	2	1

$\odot_4$	0	1	2	3	x^{-1}
0	0	0	0	0	–
1	0	1	2	3	1
2	0	2	0	2	–
3	0	3	2	1	3

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_7, \oplus$:

$\oplus_7$	0	1	2	3	4	5	6	x^{-1}
0	0	1	2	3	4	5	6	0
1	1	2	3	4	5	6	0	6
2	2	3	4	5	6	0	1	5
3	3	4	5	6	0	1	2	4
4	4	5	6	0	1	2	3	3
5	5	6	0	1	2	3	4	2
6	6	0	1	2	3	4	5	1

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_7, \odot$:

$\odot_7$	0	1	2	3	4	5	6	x^{-1}
0	0	0	0	0	0	0	0	–
1	0	1	2	3	4	5	6	1
2	0	2	4	6	1	3	5	4
3	0	3	6	2	5	1	4	5
4	0	4	1	5	2	6	3	2
5	0	5	3	1	6	4	2	3
6	0	6	5	4	3	2	1	6

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_8, \oplus$:

$\oplus_8$	0	1	2	3	4	5	6	7	x^{-1}
0	0	1	2	3	4	5	6	7	0
1	1	2	3	4	5	6	7	0	7
2	2	3	4	5	6	7	0	1	6
3	3	4	5	6	7	0	1	2	5
4	4	5	6	7	0	1	2	3	4
5	5	6	7	0	1	2	3	4	3
6	6	7	0	1	2	3	4	5	2
7	7	0	1	2	3	4	5	6	1

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_8, \odot$:

$\odot_8$	0	1	2	3	4	5	6	7	x^{-1}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	–
1	0	1	2	3	4	5	6	7	1
2	0	2	4	6	0	2	4	6	–
3	0	3	6	1	4	7	2	5	3
4	0	4	0	4	0	4	0	4	–
5	0	5	2	7	4	1	6	3	5
6	0	6	4	2	0	6	4	2	–
7	0	7	6	5	4	3	2	1	7

Aufgabe 5.1

Konstruieren Sie einen Gruppoid, in dessen Verknüpfungstabelle in jeder Zeile und Spalte jedes Element genau einmal vorkommt, der aber keine Gruppe ist. Geben Sie an, welche Gruppenaxiome außer dem ersten noch erfüllt sind.

Hinweis: Bereits mit 3 Elementen können Sie ein Beispiel finden.

$\circ$	1	2	3
1	1	3	2
2	2	1	3
3	3	2	1

Außer der inneren Verknüpfung sind keine weiteren Gruppenaxiome erfüllt.

Aufgabe 5.1

- $(1 \circ 2) \circ 3 = 1 \ \wedge \ 1 \circ (2 \circ 3) = 2 \quad \Longrightarrow$ nicht assoziativ!
- $\forall a \in G : a \circ 1 = a$ aber: $\nexists e \in G \ \forall a \in G : e \circ a = a$
  $\Longrightarrow$ kein neutrales Element!
- ohne neutrales Element kein Inverses!
- $2 \circ 3 = 3 \ \wedge \ 3 \circ 2 = 2 \quad \Longrightarrow$ nicht kommutativ!

Aufgabe 5.2

Betrachten Sie die Menge $\{a, b\}$ und die Verknüpfung $+$ mit

$$a + a = a, \quad a + b = b, \quad b + a = a, \quad b + b = b$$

Warum ist das keine Gruppe? Geben Sie an, welche Gesetze verletzt sind.

Da nur die innere Verknüpfung und das Assoziativgesetz erfüllt sind, handelt es sich um eine Halbgruppe.

Folgende Gesetze werden nicht erfüllt:

- Neutrales Element ($\nexists e \in G \ \forall x \in G : x \circ e = x$)
- Inverses Element (da es kein e gibt)
- Kommutativgesetz (abelsche Gruppe) ($a + b = b \wedge b + a = a$)

Aufgabe 5.3

Überprüfen Sie das Assoziativgesetz in S_3 durch Zwischenrechnungen für: $\rho_1 \circ \rho_1 \circ \sigma_r$.

$(\rho_1 \circ \rho_1) \circ \sigma_r = \rho_2 \circ \sigma_r = \sigma_o$

$\rho_1 \circ (\rho_1 \circ \sigma_r) = \rho_1 \circ \sigma_l = \sigma_o$ ✓

Betrachten Sie die Menge
$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + b \quad \text{für } m, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Zeigen Sie, dass diese Menge mit der elementweisen Addition eine abelsche Gruppe bildet, indem Sie alle Axiome konkret für allgemeine Elemente dieser Menge aufschreiben und ihre Gültigkeit in Worten oder formal begründen.

b) Zeigen Sie, dass diese Menge mit der elementweisen Multiplikation keine abelsche Gruppe bildet, indem Sie konkret ein Axiom angeben, das verletzt ist. Weisen Sie das durch ein Gegenbeispiel nach.

Aufgabe 5.4 a)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + b \quad \text{für } m,b \in \mathbb{R}$

Es sei

$g(x) = m_1x + b_1$
$h(x) = m_2x + b_2$
$i(x) = m_3x + b_3$

1) Innere Verknüpfung: $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$

$$g(x) \oplus h(x) = m_1x + b_1 + m_2x + b_2 = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)$$
$$(m_1 + m_2) \in \mathbb{R} \wedge (b_1 + b_2) \in \mathbb{R} \implies$$
$$(m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2) = mx + b \quad \text{mit } m,b \in \mathbb{R}\ \checkmark$$

2) Assoziativgesetz: $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$$\big(g(x) \oplus h(x)\big) \oplus i(x) = \big((m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)\big) + (m_3x + b_3) =$$
$$(m_1 + m_2 + m_3)x + (b_1 + b_2 + b_3) =$$
$$(m_1x + b_1) + \big((m_2 + m_3)x + (b_2 + b_3)\big) =$$
$$g(x) \oplus \big(h(x) \oplus i(x)\big)\ \checkmark$$

3) Neutrales Element: $\exists e \in G \; \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a$

$e = 0x + 0 = 0$
$f(x) \oplus e = (mx + b) + 0 = mx + b = f(x) = 0 + (mx + b) = e \oplus f(x)$ ✓

4) Inverses Element $\forall a \in G \; \exists a^{-1} \in G : a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$

$f(x) \oplus f(x)^{-1} = (mx + b) + (-mx - b) = 0 = e = (-mx - b) + (mx + b) = f(x)^{-1} \oplus f(x)$ ✓

5) Kommutativgesetz $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$

$g(x) \oplus h(x) = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2) = (m_2 + m_1)x + (b_2 + b_1) = h(x) \oplus g(x)$ ✓

Da alle fünf Axiome gelten, bildet die Menge eine abelsche Gruppe.

Das neutrale Element bezüglich der elementweisen Multiplikation ist die Einsfunktion: $e = 0x + 1 = 1$

Bei der Nullfunktion und allen Funktionen mit Nullstelle ($m \neq 0$) kann es kein inverses Element $f(x)^{-1}$ geben, so dass $f(x) \odot f(x)^{-1} = 1$ wäre.

Beispiel mit der Nullfunktion:

$$j(x) = 0x + 0$$

$$j(x) \odot j(x)^{-1} = e$$

$$\implies 0x + 0 \odot j(x)^{-1} = 1$$

$$\implies 0 \odot j(x)^{-1} = 1$$

$$\implies 0 = 1 \lightning$$

Geben Sie bei folgenden Strukturen an, ob es sich um Gruppen handelt:
Falls ja, geben Sie an, ob es sich auch um eine abelsche Gruppe handelt und geben Sie das neutrale Element und für ein allgemeines Element sein Inverses an.
Falls nein, geben Sie das Gruppen-Axiom an, das verletzt wird.

a) $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ (Definition: $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$)

Abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist 1. Das Inverse zu jedem Element ist sein Kehrwert: $\forall x \in \mathbb{Q}^+ : x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$

b) $(\mathbb{Q}^-, \cdot)$ (Definition: $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$)

Keine Gruppe, da keine Innere Verknüpfung: Das Produkt von zwei negative Zahlen ist stets positiv und somit $\notin \mathbb{Q}^-$.
Das einzig mögliche neutrale Element (1) ist ebenfalls $\notin \mathbb{Q}^-$.
Somit kann es auch kein inverses Element geben.

Aufgabe 5.6)

Betrachten Sie die Gruppen $G_1 = (\mathbb{R}, +)$ und $G_2 = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ (wobei $\mathbb{R}^+$ für die positiven reelen Zahlen ohne die Null steht).
Zeigen Sie, dass diese beiden Gruppen isomorph sind mit dem Isomorphismus:

$$I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad \text{, wobei} \quad I(x) = e^x.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass I eine bijektive Abbildung ist und die Gruppenstruktur erhält, indem Sie die Isomorphiebedingungen nachprüfen. Dafür müssen Sie auch I^{-1} angeben.

Aufgabe 5.6)

$$I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad \text{, wobei} \quad I(x) = e^x.$$

I ist surjektiv, da jeder Wert aus $\mathbb{R}^+$ durch e^x mit $x \in \mathbb{R}$ erreicht wird, und injektiv, da nur jeweils ein einziges x für jedes Abbild in Frage kommt.
Somit ist I bijektiv und die Umkehrfunktion lautet:

$$I^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad I^{-1}(x) = ln(x)$$

$\forall a, b \in G_1 : I(a + b) = I(a) \cdot I(b)$

$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ ✓(Potenzgesetz)

$\forall a, b \in G_2 : I^{-1}(a \cdot b) = I^{-1}(a) + I^{-1}(b)$

$ln(a \cdot b) = ln(a) + ln(b)$ ✓(Logarithmusgesetz)

Aufgabe 5.7

Konstruieren Sie eine Struktur $(M, \circ)$ mit einer Menge M aus 4 Elementen und einer Verknüpfungsoperation $\circ$, sodass in der Verknüpfungstabelle zwar in jeder Zeile und Spalte genau ein Element aus M steht, aber die Struktur dennoch keine Gruppe ist.

Hinweis: Versuchen Sie, das Assoziativgesetz zu verletzen!

$\circ$	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	2	3	4	1
3	3	1	2	4
4	4	2	1	3

$$(2 \circ 3) \circ 4 = 4 \circ 4 = 3$$

$$2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 4 = 1$$

$$3 \neq 1$$

Geben Sie die Verknüpfungstabellen von $\oplus$ und $\odot$ für folgende Restklassengruppen an:

$$\mathbb{Z}_4, \ \mathbb{Z}_7 \text{ und } \mathbb{Z}_8$$

Geben Sie zusätzlich für jedes Element das inverse Element an (falls es eins gibt).

$\oplus_4$	0	1	2	3	x^{-1}
0	0	1	2	3	0
1	1	2	3	0	3
2	2	3	0	1	2
3	3	0	1	2	1

$\odot_4$	0	1	2	3	x^{-1}
0	0	0	0	0	–
1	0	1	2	3	1
2	0	2	0	2	–
3	0	3	2	1	3

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_7, \oplus$:

$\oplus_7$	0	1	2	3	4	5	6	x^{-1}
0	0	1	2	3	4	5	6	0
1	1	2	3	4	5	6	0	6
2	2	3	4	5	6	0	1	5
3	3	4	5	6	0	1	2	4
4	4	5	6	0	1	2	3	3
5	5	6	0	1	2	3	4	2
6	6	0	1	2	3	4	5	1

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_7, \odot$:

$\odot_7$	0	1	2	3	4	5	6	x^{-1}
0	0	0	0	0	0	0	0	–
1	0	1	2	3	4	5	6	1
2	0	2	4	6	1	3	5	4
3	0	3	6	2	5	1	4	5
4	0	4	1	5	2	6	3	2
5	0	5	3	1	6	4	2	3
6	0	6	5	4	3	2	1	6

Aufgabe 5.8

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_8, \oplus$:

$\oplus_8$	0	1	2	3	4	5	6	7	x^{-1}
0	0	1	2	3	4	5	6	7	0
1	1	2	3	4	5	6	7	0	7
2	2	3	4	5	6	7	0	1	6
3	3	4	5	6	7	0	1	2	5
4	4	5	6	7	0	1	2	3	4
5	5	6	7	0	1	2	3	4	3
6	6	7	0	1	2	3	4	5	2
7	7	0	1	2	3	4	5	6	1

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_8, \odot$:

$\odot_8$	0	1	2	3	4	5	6	7	x^{-1}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	–
1	0	1	2	3	4	5	6	7	1
2	0	2	4	6	0	2	4	6	–
3	0	3	6	1	4	7	2	5	3
4	0	4	0	4	0	4	0	4	–
5	0	5	2	7	4	1	6	3	5
6	0	6	4	2	0	6	4	2	–
7	0	7	6	5	4	3	2	1	7

Aufgabe 5.9

Geben Sie die Verknüpfungstabellen von $\odot$ für die folgenden primen Restklassengruppen an:

$$\mathbb{Z}_4^*, \ \mathbb{Z}_7^* \text{ und } \mathbb{Z}_{12}^*$$

$\mathbb{Z}_4^*, \odot_4$	1	3
1	1	3
3	3	1

$\mathbb{Z}_7^*, \odot_7$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_{12}^*, \odot_{12}$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

a) Geben Sie die Tabelle der Gruppe $(\mathbb{Z}_9^*, \odot_9)$ an.

$\mathbb{Z}_9^*, \odot$	$[1]_9$	$[2]_9$	$[4]_9$	$[5]_9$	$[7]_9$	$[8]_9$
$[1]_9$	$[1]_9$	$[2]_9$	$[4]_9$	$[5]_9$	$[7]_9$	$[8]_9$
$[2]_9$	$[2]_9$	$[4]_9$	$[8]_9$	$[1]_9$	$[5]_9$	$[7]_9$
$[4]_9$	$[4]_9$	$[8]_9$	$[7]_9$	$[2]_9$	$[1]_9$	$[5]_9$
$[5]_9$	$[5]_9$	$[1]_9$	$[2]_9$	$[7]_9$	$[8]_9$	$[4]_9$
$[7]_9$	$[7]_9$	$[5]_9$	$[1]_9$	$[8]_9$	$[4]_9$	$[2]_9$
$[8]_9$	$[8]_9$	$[7]_9$	$[5]_9$	$[4]_9$	$[2]_9$	$[1]_9$

b) Warum darf die Primzahl 3 nicht in $(\mathbb{Z}_9^*, \odot_9)$ enthalten sein?

3 ist zu 9 nicht teilerfremd: $[3]_9 \circ [3]_9 = [0]_9$

$[0]_9 \notin \mathbb{Z}_9^* \implies$ innere Verknüpfung verletzt!

Geben Sie für die vierelementigen Gruppen $(\mathbb{Z}_8{}^*, \odot)$, $(\mathbb{Z}_{10}{}^*, \odot)$, $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ und $(\mathbb{Z}_2^2, \oplus)$ an, welche Gruppen isomorph sind. Tipp: Es sind jeweils zwei isomorph. Geben Sie die Isomorphismen an und begründen Sie, warum nicht alle vier Gruppen isomorph sein können.

$\mathbb{Z}_8{}^*, \odot$	1	3	5	7
$\mathbb{Z}_2^2, \oplus_2$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
ord	1	2	2	2

$\mathbb{Z}_{10}{}^*, \odot$	1	3	9	7
$\mathbb{Z}_4, \oplus_4$	0	1	2	3
ord	1	4	2	4

Es können nicht alle vier Gruppen isomorph sein, da jedes Element auf ein Element gleicher Ordnung abgebildet werden muss.

Geben Sie für die folgenden Elemente bezüglich der komponentenweisen Addition ihre inversen Elemente an:

$(2,2,0,2) \in \mathbb{Z}_5^4$

$(2,2,0,2)^{-1} = (3,3,0,3)$
denn $(2,2,0,2) \oplus (3,3,0,3) \equiv_5 (0,0,0,0)$

$(2,2,3,0,2) \in \mathbb{Z}_6^5$

$(2,2,3,0,2)^{-1} = (4,4,3,0,4)$
denn $(2,2,3,0,2) \oplus (4,4,3,0,4) \equiv_6 (0,0,0,0,0)$

Geben Sie ferner die Ordnung der Elemente an und weisen Sie das durch Zwischenergebnisse nach:

$(2, 2, 0, 2) \in \mathbb{Z}_5^4$

$ord(2, 2, 0, 2) = 5$

denn:

$$(2, 2, 0, 2) \oplus (2, 2, 0, 2) \equiv_5 (4, 4, 0, 4) \qquad (2)$$
$$(4, 4, 0, 4) \oplus (2, 2, 0, 2) \equiv_5 (1, 1, 0, 1) \qquad (3)$$
$$(1, 1, 0, 1) \oplus (2, 2, 0, 2) \equiv_5 (3, 3, 0, 3) \qquad (4)$$
$$(3, 3, 0, 3) \oplus (2, 2, 0, 2) \equiv_5 (0, 0, 0, 0) \qquad (5)$$

Geben Sie ferner die Ordnung der Elemente an und weisen Sie das durch Zwischenergebnisse nach:

$(2, 2, 3, 0, 2) \in \mathbb{Z}_6^5$

$ord(2, 2, 3, 0, 2) = 6$

denn:

$$(2, 2, 3, 0, 2) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (4, 4, 0, 0, 4) \qquad (2)$$
$$(4, 4, 0, 0, 4) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (0, 0, 3, 0, 0) \qquad (3)$$
$$(0, 0, 3, 0, 0) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (2, 2, 0, 0, 2) \qquad (4)$$
$$(2, 2, 0, 0, 2) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (4, 4, 3, 0, 4) \qquad (5)$$
$$(4, 4, 3, 0, 4) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (0, 0, 0, 0, 0) \qquad (6)$$

Aufgabe 5.13

Geben Sie für jedes Element von $\mathbb{Z}_3^2$ die Ordnung bezüglich der komponentenweisen Addition an (ohne Nachweis).

$\mathbb{Z}_3^2, \oplus_3$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
ord	1	3	3	3	3	3

$\mathbb{Z}_3^2, \oplus_3$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
ord	3	3	3

Aufgabe 5.14

Finden Sie eine minimale Menge von Elementen aus $\mathbb{Z}_2^3$, welche die gesamte Gruppe bezüglich der komponentenweisen Addition erzeugt, und weisen Sie das nach.

$\mathbb{Z}_2^3 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

$\mathbf{\{(0{,}0{,}1),(0{,}1{,}0),(1{,}0{,}0)\}} \subset \mathbb{Z}_2^3$

$$(0,0,1) \oplus_2 (0,0,1) = (0,0,0)$$
$$(0,0,1) \oplus_2 (0,1,0) = (0,1,1)$$
$$(0,0,1) \oplus_2 (1,0,0) = (1,0,1)$$
$$(0,1,0) \oplus_2 (1,0,0) = (1,1,0)$$
$$(0,0,1) \oplus_2 (0,1,0) \oplus_2 (1,0,0) = (1,1,1)$$

Außer $(0,0,0)$ haben alle Elemente die Ordnung 2. Mit weniger als drei Elementen lässt sich $\mathbb{Z}_2^3$ nicht erzeugen.

Aufgabe 5.15

Überprüfen Sie in $\mathbb{Q}_6$ die Verknüpfungsergebnisse durch Nachrechnen von:

a) $(1-x) \circ \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{x-1}{x} = \frac{x-x+1}{x} = \frac{1}{x}$ ✓

b) $\frac{x-1}{x} \circ (1-x) = \frac{(1-x)-1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{-1+x} = \frac{x}{x-1}$ ✓

Aufgabe 5.16

Betrachten Sie folgende bijektive Abbildung f zwischen $(S_3, \circ)$ und $(\mathbb{Q}_6, \circ)$:

$$f(\rho_0) = x$$

$$f(\rho_1) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(\rho_2) = \frac{x-1}{x}$$

$$f(\sigma_l) = \frac{1}{x}$$

$$f(\sigma_r) = \frac{x}{x-1}$$

$$f(\sigma_o) = 1 - x$$

a) Zeigen Sie, dass f zwar ordnungserhaltend ist,...

$$
\begin{aligned}
f(\rho_0) &= x & \quad \mathit{Ordnung} &= 1 \\
f(\rho_1) &= \frac{1}{1-x} & \quad \mathit{Ordnung} &= 3 \\
f(\rho_2) &= \frac{x-1}{x} & \quad \mathit{Ordnung} &= 3 \\
f(\sigma_l) &= \frac{1}{x} & \quad \mathit{Ordnung} &= 2 \\
f(\sigma_r) &= \frac{x}{x-1} & \quad \mathit{Ordnung} &= 2 \\
f(\sigma_o) &= 1-x & \quad \mathit{Ordnung} &= 2
\end{aligned}
$$

a) Zeigen Sie, dass f zwar ordnungserhaltend ist, aber dennoch kein Isomorphismus, weil die Gruppenoperationen nicht miteinander verträglich sind, wie von einem Isomorphismus gefordert.
Hinweis: Überlegen Sie sich, was bei den erzeugenden Elementen ρ_1 und σ_l für die Bilder $f(\rho_1)$ und $f(\sigma_l)$ und die jeweiligen Verknüpfungen gefordert wird.

$$\rho_1 \circ \sigma_l = \sigma_o \implies f(\sigma_o) = f(\rho_1 \circ \sigma_l) = f(\rho_1) \circ f(\sigma_l)$$

$$= \frac{1}{1-x} \circ \frac{1}{x} \quad = \quad \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \quad = \quad \frac{1}{\frac{x-1}{x}} \quad = \quad \frac{x}{x-1} \quad \neq \quad 1-x$$

b) Verändern Sie die Abbildung f, indem Sie $f(\rho_1)$ und $f(\sigma_l)$ beibehalten, aber die anderen Zuweisungen so vornehmen, dass f insgesamt einen Isomorphismus bildet.

$$f(\rho_0) = x$$

$$f(\rho_1) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(\rho_2) = f(\rho_1 \circ \rho_1) = f(\rho_1) \circ f(\rho_1) = \frac{1}{1-x} \circ \frac{1}{1-x} = \frac{x-1}{x}$$

$$f(\sigma_l) = \frac{1}{x}$$

$$f(\sigma_r) = f(\sigma_l \circ \rho_1) = f(\sigma_l) \circ f(\rho_1) = \frac{1}{x} \circ \frac{1}{1-x} = 1-x$$

$$f(\sigma_o) = f(\rho_1 \circ \sigma_l) = f(\rho_1) \circ f(\sigma_l) = \frac{1}{1-x} \circ \frac{1}{x} = \frac{x}{x-1}$$

Außer den beiden Gruppen $(S_3, \circ)$ und $(\mathbb{Q}_6, \circ)$ aus der vorigen Aufgabe sind auf Seite 196 noch zwei weitere Gruppen mit 6 Elementen angegeben: $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$ und $(\mathbb{Z}_9^*, \odot_9)$.

a) Identifizieren Sie noch drei weitere Gruppen mit 6 Elementen vom Typ $(\mathbb{Z}_n^*, \odot_n)$. Geben Sie die 6 Elemente jeweils explizit an.
$\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\mathbb{Z}_{14}^* = \{1, 3, 5, 9, 11, 13\}$
$\mathbb{Z}_{18}^* = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$

b) Begründen Sie, warum diese neuen Gruppen alle zu einer der vier bereits bekannten Gruppen isomorph sind.

Alle Gruppen aus a) sind zyklisch:

In $\mathbb{Z}_7^*$ hat 3 die Ordnung 6:
$3^1 \equiv_7 3;\ 3^2 \equiv_7 2;\ 3^3 \equiv_7 6;\ 3^4 \equiv_7 4;\ 3^5 \equiv_7 6;\ 3^6 \equiv_7 1$

In $\mathbb{Z}_{14}^*$ hat 3 die Ordnung 6.
$3^1 \equiv_{14} 3;\ 3^2 \equiv_{14} 9;\ 3^3 \equiv_{14} 13;\ 3^4 \equiv_{14} 11;\ 3^5 \equiv_{14} 5;\ 3^6 \equiv_{14} 1$

In $\mathbb{Z}_{18}^*$ hat 5 die Ordnung 6.
$5^1 \equiv_{18} 5;\ 5^2 \equiv_{18} 7;\ 5^3 \equiv_{18} 17;\ 5^4 \equiv_{18} 13;\ 5^5 \equiv_{18} 11;\ 5^6 \equiv_{18} 1$

Nach Satz 5.9 sind damit alle isomorph zu den zyklischen Gruppen $(\mathbb{Z}_6, \oplus_6)$ und $(\mathbb{Z}_9^*, \odot_9)$.

Versuchen Sie, einen Körper mit 4 Elementen zu konstruieren:

a) Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{Z}_4, \oplus_4)$.
Nehmen Sie die 0 aus dieser Gruppe heraus und konstruieren Sie aus den restlichen drei Elementen eine Multiplikationsgruppe $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \odot_4)$, wobei 1 das neutrale Element sein soll.
Zeigen Sie an einem Beispiel, dass diese beiden Gruppen das Distributivgesetz verletzen und die Struktur $(\mathbb{Z}_4, \oplus_4, \odot_4)$ offensichtlich kein Körper ist.

b) Konstruieren Sie den Körper GF(4) systematisch nach dem Verfahren auf Folie DM5-20 mit einem zulässigen Polynom und vergleichen Sie die Tabellen mit denen von der vorigen Aufgabe. Worin liegt der entscheidende Unterschied?

c) Verfahren Sie wie in b), aber verwenden Sie in unzulässiger Weise das reduzible Polynom $x^2 + 1$. Warum ist dieses Polynom unzulässig? Was fällt Ihnen an der Tabelle auf?

a) Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{Z}_4, \oplus_4)$.
Nehmen Sie die 0 aus dieser Gruppe heraus und konstruieren Sie aus den restlichen drei Elementen eine Multiplikationsgruppe $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \odot_4)$, wobei 1 das neutrale Element sein soll.
Zeigen Sie an einem Beispiel, dass diese beiden Gruppen das Distributivgesetz verletzen und die Struktur $(\mathbb{Z}_4, \oplus_4, \odot_4)$ offensichtlich kein Körper ist.

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_4 : \quad (a \oplus_4 b) \odot_4 c = (a \odot_4 c) \oplus_4 (b \odot_4 c)$

$(1 \oplus_4 2) \odot_4 3 \;=\; 3 \odot_4 3 \;=\; 2$

$(1 \odot_4 3) \oplus_4 (2 \odot_4 3) \;=\; 3 \oplus_4 1 \;=\; 0$ ↯

b) Konstruieren Sie den Körper GF(4) systematisch nach dem Verfahren auf Folie DM5-20 mit einem zulässigen Polynom und vergleichen Sie die Tabellen mit denen von der vorigen Aufgabe. Worin liegt der entscheidende Unterschied?

$4 = 2^2 \implies$ Primkörper ist $GF(2)$ $\quad p = 2 \quad r = 2$

Elemente: $\{0\ ,\ 1\ ,\ x\ ,\ x+1\}$

Zuweisung: 0 1 2 3

$\oplus_2$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

irreduzibles Polynom: $g(x) = x^2 + x + 1$

$g(0) \equiv_2 0 + 0 + 1 \equiv_2 1$
$g(1) \equiv_2 1 + 1 + 1 \equiv_2 1$

$g(x)$ hat keine Nullstellen und $deg(g(x)) \leq 3 \implies$ irreduzibel

$\odot_2^g$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$		
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$		

$$(1,0) \odot_2 (1,0) = x \odot_2 x \equiv_2 x^2$$

$$\begin{array}{rl} x^2 & \equiv_2 (x^2+x+1) \cdot 1 + \underline{(x+1)} \\ \underline{-x^2 - x - 1} & \\ x+1 & \end{array}$$

$\odot_2^g$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$		

$$(1,0) \odot_2 (1,1) = x \odot_2 (x+1) \equiv_2 x^2 + x$$

$$\begin{array}{ll} x^2 + x & \equiv_2 (x^2 + x + 1) \cdot 1 + \underline{1} \\ \underline{-x^2 - x - 1} & \\ \phantom{-x^2 - x - {}} 1 & \end{array}$$

$\odot_2^g$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$	

$$(1,1) \odot_2 (1,1) = (x+1) \odot_2 (x+1) \equiv_2 x^2 + 1$$

$$\begin{array}{l} x^2 \quad + \quad 1 \;\equiv_2 (x^2+x+1)\cdot 1 + \underline{x} \\ \underline{-x^2 - x - 1} \\ \qquad\quad x \end{array}$$

$\odot_2^g$	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
(0,1)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(1,0)	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)
(1,1)	(0,0)	(1,1)	(0,1)	(1,0)

$\odot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

...vergleichen Sie die Tabellen mit denen von der vorigen Aufgabe. Worin liegt der entscheidende Unterschied?

a)

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

b)

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\odot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Die Multiplikationsgruppen$\setminus\{0\}$ sind beide isomorph zu $\mathbb{Z}_3, +$. Änderungen ergeben sich in der Additionstabelle, wodurch nun das Distributivgesetz erfüllt wird.

c) Verfahren Sie wie in b), aber verwenden Sie in unzulässiger Weise das reduzible Polynom $x^2 + 1$. Warum ist dieses Polynom unzulässig? Was fällt Ihnen an der Tabelle auf?

zu verwendendes Polynom sei: $g(x) = x^2 + 1$

$g(0) \equiv_2 0 + 1 \equiv_2 1$
$g(1) \equiv_2 1 + 1 \equiv_2 0$

$g(x)$ hat eine Nullstellen bei $x = 1 \implies$ reduzibel $\lightning$

$$(1,0) \odot_2 (1,0) = x \odot_2 x \equiv_2 x^2$$

$$\begin{array}{l} x^2 \\ \underline{-x^2 \quad - 1} \\ \qquad\quad 1 \end{array} \quad \equiv_2 (x^2+1) \cdot 1 + \underline{1}$$

$\odot_2^g$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
(0, 1)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(1, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	
(1, 1)	(0, 0)	(1, 1)		

$$(1,0) \odot_2 (1,1) = x \odot_2 (x+1) \equiv_2 x^2 + x$$

$$\begin{array}{l} \quad x^2 + x \qquad \equiv_2 (x^2+1) \cdot 1 + \underline{x+1} \\ \underline{-x^2 \qquad\quad - 1} \\ \qquad\qquad x + 1 \end{array}$$

$\odot_2^g$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,1)$	

$$(1,1) \odot_2 (1,1) = (x+1) \odot_2 (x+1) \equiv_2 x^2 + 1$$

$$\begin{array}{rcrl} x^2 & + & 1 & \equiv_2 (x^2+1) \cdot 1 + \underline{0} \\ \underline{-x^2} & \underline{-} & \underline{1} & \\ & & 0 & \end{array}$$

$\odot_2^g$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(0,0)$

Die entstandene Multiplikationsgruppe ist nicht einmal ein Gruppoid, da mit $(1,1) \odot_2^g (1,1) \equiv_2 (0,0) = e_0$ die innere Verknüpfung verletzt ist.

a) Betrachten Sie den missglückten Versuch der Multiplikationstabelle für einen Körper mit 8 Elementen aus Beispiel 5.14, und weisen Sie mit einem anderen Beispiel als dem von Beispiel 5.15 nach, dass das Distributivgesetz verletzt ist.

$$((0,1,1) \oplus_2 (1,1,0)) \odot (0,1,0) = (1,0,1) \odot (0,1,0) = (1,1,0)$$

$$((0,1,1) \odot (0,1,0)) \oplus_2 ((1,1,0) \odot (0,1,0)) = (1,0,0) \oplus_2 (1,1,1) = (0,1,1)$$

$$(1,1,0) \neq (0,1,1)$$

Aufgabe 5.19 b)

b) Weisen Sie mit Ihrem Beispiel aus a) nach, dass das Distributivgesetz für die korrigierte Multiplikationsgruppe in Beispiel 5.24 erfüllt ist.

$$((0,1,1) \oplus_2 (1,1,0)) \odot (0,1,0) = (1,0,1) \odot (0,1,0) = (0,0,1)$$

$$((0,1,1) \odot (0,1,0)) \oplus_2 ((1,1,0) \odot (0,1,0)) =$$
$$(1,1,0) \oplus_2 (1,1,1) = (0,0,1)$$

$$(0,0,1) = (0,0,1) \checkmark$$

Aufgabe 5.20

Schreiben Sie die Elemente der Gruppentafel für GF(8) aus Beispiel 5.24 auf S. 193/194 in den Zeilen und Spalten in einer solchen Reihenfolge auf, dass man auf den ersten Blick sieht, dass die Gruppentafel zyklisch ist.

Hinweis: Beachten Sie die analoge Konstruktion auf Seite 195 für GF(9).

$(0,1,0)$ hat die Ordnung 7 und ist somit ein erzeugendes Element.

$\odot_2^g$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$
$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$
$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$
$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$
$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$
$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$
$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$

Aufgabe 5.21

Arbeiten Sie in GF(9) mit folgender Benennung der Elemente:

$$\begin{Bmatrix} 0, & 1, & 2, & x, & x+1, & x+2, & 2x, & 2x+1, & 2x+2 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \end{Bmatrix}$$

Benutzen Sie folgende Rechentabellen und bei Bedarf das irreduzible Polynom: x^2+1:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\odot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	0	3	6	2	5	8	1	4	7
4	4	5	3	7	8	6	1	2	0	4	0	4	8	5	6	1	7	2	3
5	5	3	4	8	6	7	2	0	1	5	0	5	7	8	1	3	4	6	2
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	0	6	3	1	7	4	2	8	5
7	7	8	6	1	2	0	4	5	3	7	0	7	5	4	2	6	8	3	1
8	8	6	7	2	0	1	5	3	4	8	0	8	4	7	3	2	5	1	6

Aufgabe 5.21

Prüfen Sie die Korrektheit der Tabellen an folgenden Beispielen nach:

a) $5 \oplus 4 \mathrel{\hat{=}} (x+2)+(x+1) \equiv_3 2x \mathrel{\hat{=}} 6 \checkmark$

b) $5 \odot 4 \mathrel{\hat{=}} (x+2)\cdot(x+1) \equiv_3 x^2+2$

$$x^2+2 \equiv_3 (x^2+1)\cdot 1 + \underline{1} \mathrel{\hat{=}} 1 \checkmark$$

$$\underline{-x^2-1}$$

$$1$$

c) $7 \oplus 7 \mathrel{\hat{=}} (2x+1)+(2x+1) \equiv_3 x+2 \mathrel{\hat{=}} 5 \checkmark$

d) $7 \odot 2 \mathrel{\hat{=}} (2x+1)\cdot 2 \equiv_3 x+2 \mathrel{\hat{=}} 5 \checkmark$

e) $8 \oplus 2 \mathrel{\hat{=}} (2x+2)+2 \equiv_3 2x+1 \mathrel{\hat{=}} 7 \checkmark$

f) $8 \odot 2 \mathrel{\hat{=}} (2x+2)\cdot 2 \equiv_3 x+1 \mathrel{\hat{=}} 4 \checkmark$

g) Überprüfen Sie das Distributivgesetz mit den Elementen 2, 3 und 4.

$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$:

$(2 \oplus 3) \odot 4 = 5 \odot 4 = 1$
$(2 \odot 4) \oplus (3 \odot 4) = 8 \oplus 5 = 1$ ✓

$c \odot (a \oplus b) = (c \odot a) \oplus (c \odot b)$:

$4 \odot (2 \oplus 3) = 4 \odot 5 = 1$
$(4 \odot 2) \oplus (4 \odot 3) = 8 \oplus 5 = 1$ ✓

Aufgabe 5.22

Untersuchen Sie, ob es zu den folgenden Zahlen einen Körper mit dieser Anzahl von Elementen gibt. Falls ja, geben Sie die Elemente in Vektor- oder Polynomschreibweise an. Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

a) 13 $GF(13) = \{(0),(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(9),(10),(11),(12)\}$

b) 16
$GF(16) = \{(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$

c) 21 $= 3 \cdot 7$ und somit keine Potenz einer Primzahl p

d) 100 $= 2^2 \cdot 5^5$ und somit keine Potenz einer Primzahl p

a) Geben Sie alle Elemente aus GF(16) in Polynomschreibweise an.
$GF(16) =$
$\{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x^3, x^3+1,$
$x^3+x, x^3+x+1, x^3+x^2, x^3+x^2+1, x^3+x^2+x, x^3+x^2+x+1\}$

b) Berechnen Sie $(x^2+x) \odot (x^3+1)$: Finden Sie dafür ein geeignetes irreduzibles Polynom, und weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach.

Irreduzibles Polynom: $h(x) = x^4 + x + 1$

$x^4 + x + 1$ lässt sich nicht in zwei kleinere Polynome mit $deg > 0$ zerlegen: Wegen x^4 und 1 kämen auf einer Seite nur die Faktoren $x+1$, x^2+1 und x^2+x+1 in Betracht. Es lässt sich jedoch (mittels Polynomdivision) kein passender zweiter Faktor finden.

Aufgabe 5.23 b)

$$(x^2+x)\odot_2(x^3+1)\equiv_2 x^5+x^4+x^2+x$$

$$\begin{array}{rrrrl}
x^5 + x^4 & & + x^2 + x & & \equiv_2 (x^4+x+1)\cdot(x+1)+\underline{x+1} \\
-x^5 & & - x^2 - x & & \\
\hline
& x^4 & & & \\
& -x^4 & & - x - 1 & \\
\hline
& & & x+1 &
\end{array}$$

$$(x^2+x)\odot_2^g(x^3+1)=x+1$$

Aufgabe 5.24

a) Berechnen Sie das Polynom $(3x^4 + 4x^3 + 2x)$ modulo $(x^3 + x + 4)$ in $\mathbb{Z}_7[x]$.

b) Für welchen Körper ist diese Berechnung relevant?

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Sie diese Rechnung hier zur Erstellung einer Multiplikationstabelle verwenden können? Ist diese Bedingung hier erfüllt? (Begründung!)

Aufgabe 5.24 a) + b)

a) Berechnen Sie das Polynom $(3x^4 + 4x^3 + 2x)$ modulo $(x^3 + x + 4)$ in $\mathbb{Z}_7[x]$.

$$\begin{array}{rrrrl}
3x^4 & +\,4x^3 & & +\;\;2x & \equiv_7 (x^3 + x + 4) \cdot (3x + 4) + \underline{(4x^2 + 5)} \\
\underline{-3x^4} & \underline{} & \underline{-\,3x^2} & \underline{-\,12x} & \\
 & 4x^3 & +\,4x^2 & +\;\;4x & \\
 & \underline{-4x^3} & \underline{} & \underline{-\;\;4x} & \underline{-\,16} \\
 & & 4x^2 & & +\;\;5
\end{array}$$

b) Für welchen Körper ist diese Berechnung relevant?

$7^3 = 343 \implies GF(343)$

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Sie diese Rechnung hier zur Erstellung einer Multiplikationstabelle verwenden können? Ist diese Bedingung hier erfüllt? (Begründung!)

$$g(x) = x^3 + x + 4$$

$$g(0) \equiv_7 0 + 0 + 4 \equiv_7 4$$

$$g(1) \equiv_7 1 + 1 + 4 \equiv_7 6$$

$$g(2) \equiv_7 1 + 2 + 4 \equiv_7 0$$

Das Polynom $x^3 + x + 4$ hätte in $\mathbb{Z}_7[x]$ irreduzibel sein müssen. Das ist es aber nicht, da es bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

Aufgabe 5.25

Untersuchen Sie den Körper mit 343 Elementen und vergleichen Sie Ihre Resultate mit einem der zur Verfügung stehenden Programme über Endliche Körper (herunterzuladen von der Seite: `http://www.fh-wedel.de/mitarbeiter/iw/f-e/fertig/sw-projekte/galoisfeld/`)

$343 = 7^3 \qquad p = 7 \quad r = 3$

a) Geben Sie ein geeignetes irreduzibles Polynom an und weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach!
Hinweis: Arbeiten Sie mit möglichst kleinen Koeffizienten! Man findet schnell einen geeigneten Kandidaten.

$g(x) = x^3 + x + 1$

$g(0) \equiv_7 0 + 0 + 1 \equiv_7 1$

$g(1) \equiv_7 1 + 1 + 1 \equiv_7 3$

$g(2) \equiv_7 1 + 2 + 1 \equiv_7 4$

$g(3) \equiv_7 6 + 3 + 1 \equiv_7 3$

$g(4) \equiv_7 1 + 4 + 1 \equiv_7 6$

$g(5) \equiv_7 6 + 5 + 1 \equiv_7 5$

$g(6) \equiv_7 6 + 6 + 1 \equiv_7 6$

$g(x)$ hat keine Nullstellen und $deg(g(x)) \leq 3 \implies$ irreduzibel

b) Überprüfen Sie das Resultat von $200 \oplus 300$, indem Sie die Vektoraddition explizit durchführen!

$$200 = 4 \cdot 7^2 + 4$$
$$200 \triangleq 4x^2 + 4 \triangleq (4, 0, 4)$$
$$300 = 6 \cdot 7^2 + 6$$
$$300 \triangleq 6x^2 + 6 \triangleq (6, 0, 6)$$

$$200 \oplus 300 :$$
$$(4, 0, 4) \oplus (6, 0, 6) \equiv_7 (3, 0, 3)$$
$$3 \cdot 7^2 + 3 = 150$$
$$200 \oplus 300 = 150$$

c) Überprüfen Sie das Resultat von $200 \odot 300$, indem Sie die Polynommultiplikation und anschließende Reduktion explizit durchführen!

$200 \odot 300$:

$$(4x^2+4)\cdot(6x^2+6) = 24x^4+48x^2+24 \equiv_7 3x^4+6x^2+3$$

$$\begin{array}{l} 3x^4 + 6x^2 + 3 \equiv_7 (x^3+x+1)\cdot 3x + \underline{(3x^2+4x+3)} \\ \underline{-3x^4 - 3x^2 - 3x } \\ \phantom{-3x^4 - {}} 3x^2 + 4x + 3 \end{array}$$

$$3\cdot 7^2 + 4\cdot 7 + 3 = 178$$

$$200 \odot 300 = 178$$

d) Überprüfen Sie wie eben das Resultat von $45 \odot 40$!

$45 = 6 \cdot 7 + 3$
$45 \triangleq 6x + 3 \triangleq (0, 6, 3)$

$40 = 5 \cdot 7 + 5$
$40 \triangleq 5x + 5 \triangleq (0, 5, 5)$

$45 \odot 40$:

$(6x + 3) \cdot (5x + 5) = 30x^2 + 45x + 15 \equiv_7 2x^2 + 3x + 1$

$2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 1 = 120$

$45 \odot 40 = 120$

Aufgabe 5.25 e)

e) Überprüfen Sie die Resultate von $200 \ominus 300$ und $200 \oslash 300$, indem Sie diese mit jeweils einer anderen Operation im selben Programm überprüfen! Geben Sie in Ihrer Lösung an, mit welchen Operationen Sie das überprüft haben!

$200 \ominus 300 = 250$

$250 \oplus 300 = 200 \checkmark$

$200 \oslash 300 = 3$

$3 \odot 300 = 200 \checkmark$

Beweisen Sie den Satz, dass es n^k k-Tupel einer n-elementigen Menge gibt, mit vollständiger Induktion über k: Sie dürfen benutzen, dass ein kartesisches Produkt zwischen zwei Mengen M und N insgesamt $|M| \cdot |N|$ Elemente enthält (Satz 6.1, Teil 2).

Induktionsverankerung $A(1)$ und $A(2)$:

Da es keine 0-Tupel einer n-elementigen Menge gibt aber $n^0 = 1$ wäre, gilt der Satz erst ab $k \geq 1$:

Sei $k = 1$, dann sind die 1-Tupel einer n-elementigen Menge M die Elemente der Menge selbst. Es gibt also $n = n^1$ 1-Tupel. ✓

Sie $k = 2$, dann ist die Menge aller 2-Tupel (Paare) einer n-elementigen Menge M das kartesische Produkt $M \times M$. Nach Satz 6.1, Teil 2 ist $|(M \times M)| = |M| \cdot |M| = n \cdot n = n^2$ ✓

Induktionsschluss $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen:
Es gibt n^{k+1} $(k+1)$-Tupel einer n-elementigen Menge M.

Die Menge aller $(k+1)$-Tupel einer n-elementigen Menge M ist die $(k+1)$-stellige Verknüpfung

$$\underbrace{M \times M \times ... \times M}_{k+1 \text{ Faktoren}} = \{(a_1, ..., a_k, a_{k+1}) \mid a_1, ..., a_k, a_{k+1} \in M\}$$

und gleichmächtig zu der Hintereinanderschaltung

$$(\underbrace{M \times M \times ... \times M}_{k \text{ Faktoren}}) \times M = \{((a_1, ..., a_k), a_{k+1}) \mid a_1, ..., a_{k+1} \in M\}$$

deren Elemente sich nur durch die Klammerung unterscheiden.

Nach Induktionsannahme hat die Menge

$\underbrace{M \times M \times ... \times M}_{k \text{ Faktoren}} = \{(a_1, ..., a_k) \mid a_1, ..., a_k \in M\}$ n^k Tupel.

Somit hat nach Satz 6.1, Teil 2 die Menge

$(\underbrace{M \times M \times ... \times M}_{k \text{ Faktoren}}) \times M = \{((a_1, ..., a_k), a_{k+1}) \mid a_1, ..., a_{k+1} \in M\}$

$n^k \cdot |M| = n^k \cdot n = n^{k+1}$ Tupel. ✓

Bestimmen Sie die Anzahl der durch 2, 3, 9 oder 11 teilbaren natürlichen Zahlen kleiner gleich 200 mit Hilfe der Siebformel.

Die Vielfachen von 9 sind auch Vielfache von 3. Damit bleibt die Anzahl dieselbe, wenn man nur die Teilbarkeit durch 2, 3 oder 11 betrachtet. Damit hat man die Vielfachen von 9 vollständig erfasst.

$M_2 = \{x \in \mathbb{N} | (\exists q \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot q) \wedge x \leq 200\} = \{0, 2, 4, ..., 200\}$

$M_3 = \{x \in \mathbb{N} | (\exists q \in \mathbb{N} : x = 3 \cdot q) \wedge x \leq 200\} = \{0, 3, 6, ..., 198\}$

$M_{11} = \{x \in \mathbb{N} | (\exists q \in \mathbb{N} : x = 11 \cdot q) \wedge x \leq 200\} = \{0, 11, 22, ..., 198\}$

$$|M_2 \cup M_3 \cup M_9 \cup M_{11}| = |M_2 \cup M_3 \cup M_{11}| \underset{Siebformel}{=}$$

$$|M_2| + |M_3| + |M_{11}| - |M_2 \cap M_3| - |M_2 \cap M_{11}| - |M_3 \cap M_{11}| + |M_2 \cap M_3 \cap M_{11}|$$

Berechnung der Anzahl der Elemente der Einzelmengen:

$|M_2| = |\{0, 2, 4, ..., 200\}| = \frac{200}{2} + 1 = 101$

$|M_3| = |\{0, 3, 6, ..., 198\}| = \frac{198}{3} + 1 = 67$

$|M_{11}| = |\{0, 11, 22, ..., 198\}| = \frac{198}{11} + 1 = 19$

$|M_2 \cap M_3| = |M_6| = |\{0, 6, 12, ..., 198\}| = \frac{198}{6} + 1 = 34$

$|M_2 \cap M_{11}| = |M_{22}| = |\{0, 22, 44, ..., 198\}| = \frac{198}{22} + 1 = 10$

$|M_3 \cap M_{11}| = |M_{33}| = |\{0, 33, 66, ..., 198\}| = \frac{198}{33} + 1 = 7$

$|M_2 \cap M_3 \cap M_{11}| = |\{0, 66, 132, 198\}| = 4$

Damit ergibt sich für die Gesamtmenge:

$|M_2 \cup M_3 \cup M_9 \cup M_{11}| = 101 + 67 + 19 - 34 - 10 - 7 + 4 = \underline{140}$

Ist es besser, zwei 3-stellige Zahlenschlösser oder ein 6-stelliges zu benutzen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Es ist besser ein 6-stelliges Zahlenschloss zu benutzen.

Zwei 3-stellige Zahlenschlösser:
$2 \cdot 10^3 = 2.000$ mögliche Kombinationen

Ein 6-stelliges Zahlenschloss:
$1 \cdot 10^6 = 1.000.000$ mögliche Kombinationen

Aufgabe 6.4

Gegeben sei die Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$.
Bilden Sie alle 4-elementigen Teilmengen und vergleichen Sie ihre Anzahl mit dem entsprechenden Binomialkoeffizienten.

$$
\begin{array}{ccccc}
\{a,b,c,d\} & \{a,b,c,e\} & \{a,b,c,f\} & \{a,b,d,e\} & \{a,b,d,f\} \\
\{a,b,e,f\} & \{a,c,d,e\} & \{a,c,d,f\} & \{a,c,e,f\} & \{a,d,e,f\} \\
\{b,c,d,e\} & \{b,c,d,f\} & \{b,c,e,f\} & \{b,d,e,f\} & \{c,d,e,f\}
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ 15 Teilmengen.

$$\binom{6}{4} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = \frac{30}{2} = 15 \checkmark$$

Aufgabe 6.5

Aus dem ASCII-Alphabet (mit $n = 26$ Zeichen) sollen Wörter der Länge $k = 2; 3; 4$ so gebildet werden, dass die Wiederholung eines Zeichens je Wort ausgeschlossen ist. Wie viele Wörter können jeweils gebildet werden?

$k = 2$: Es können $26 \cdot 25 = 650$ Wörter gebildet werden.

$k = 3$: Es können $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$ Wörter gebildet werden.

$k = 4$: Es können $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358800$ Wörter gebildet werden.

Aufgabe 6.6

Welchen Koeffizienten hat der Term $a^4b^2cd^3$ in $(a+b+c+d)^{10}$?

$$\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 4\cdot 1=$$

$$210\ \cdot\ 15\ \cdot\ 4\ \cdot\ 1\ =\ 12600$$

Aufgabe 6.7

Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang zwischen den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Wir benutzen nicht die Originaldefinition 6.1, sondern die Charakterisierung aus Gleichung (6.9) auf S. 241:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Aufgabe 6.7

Einsetzen dieser Charakterisierung in die rechte Seite ergibt:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!}$$

$$\underset{\text{auf Hauptnenner } k!\cdot(n-k)! \text{ bringen}}{=\!=\!=\!=} \frac{k \cdot (n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$= \frac{(k+n-k) \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k} \checkmark$$

Aufgabe 6.8

Gegeben sei die Permutation (2 5 4 3) (9 7) (1 6 8)

a) Schreiben Sie diese als Permutationstabelle und als Anordnung auf.

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$f_0 = 6\ 5\ 2\ 3\ 4\ 8\ 9\ 1\ 7$$

b) Geben Sie die Zerlegung in Transpositionen an.

(2 3) (2 4) (2 5) (9 7) (1 8) (1 6)

c) Ist die Permutation gerade oder ungerade?

gerade!

(gerade Anzahl von Transpositionen)

Gegeben sei die Permutation
(20 2 5 4) (12 10 13) (19 3 9 7 15) (11 14 17) (1 16 6 8 18).

Ist die Permutation gerade oder ungerade?
(Hinweis: Lösungszeit $<$ 1 *Minute).*

ungerade!

da ungerade Anzahl ungerader Zyklen: (20 2 5 4)

Achtung:
Ein Zyklus mit einer geraden Anzahl von Elementen lässt sich mit ungerade vielen Transpositionen darstellen, ist also ungerade. Daher ist ein Zyklus mit einer ungeraden Anzahl von Elementen gerade (trifft auf alle anderen Zyklen oben zu).

Vergleichen Sie die Permutationsgruppe Π_3 von Seite 251 mit der Symmetriegruppe S_3 von Seite 185:

a) Geben Sie den Isomorphismus zwischen Π_3 und S_3 explizit an.

$S_3, \circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	σ_l	σ_r	σ_o
$\Pi_3, \circ$	(1)	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
ord	1	3	3	2	2	2

$f(\rho_1) = (123)$ und $f(\sigma_l) = (12)$ als erzeugende Elemente festgelegt.

$f(\rho_2) = (132)$ ergibt sich aus einem verbleibenden Element mit Ordnung 3.

$f(\sigma_r) = f(\rho_2 \circ \sigma_l) = f(\rho_2) \circ f(\sigma_l) = (132) \circ (12) = (23)$

$f(\sigma_o) = (13)$, da jeweils letztes verbleibendes Element.

b) Geben Sie für jedes Element aus Π_3 sein Inverses an.

$x \in \Pi_3$	(1)	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
x^{-1}	(1)	(132)	(123)	(12)	(23)	(13)

c) Zeigen Sie, dass die Menge aller ungeraden Permutationen keine Untergruppe von Π_3 ist.

Die Menge aller ungerader Permutationen $\{(12), (13), (23)\}$ ist keine Untergruppe, da bei der Komposition von zwei ungeraden Permutationen eine gerade Permutation entsteht und somit die innere Verknüpfung verletzt wird.

Beispiel: $(12) \circ (13) = (132)$

Betrachten Sie die Gruppe S_4 aller Permutationen der Zahlen $1, 2, 3, 4$:

a) Schreiben Sie alle Elemente in Zyklendarstellung auf, und kennzeichnen Sie die Elemente der alternierenden Gruppe A_4.

$\underline{\sigma_1 = (1)}$	$\sigma_7 = (3\ 4)$	$\underline{\sigma_{13} = (1\ 4\ 3)}$	$\sigma_{19} = (1\ 3\ 4\ 2)$
$\sigma_2 = (1\ 2)$	$\underline{\sigma_8 = (1\ 2\ 3)}$	$\underline{\sigma_{14} = (2\ 3\ 4)}$	$\sigma_{20} = (1\ 4\ 2\ 3)$
$\sigma_3 = (1\ 3)$	$\underline{\sigma_9 = (1\ 2\ 4)}$	$\underline{\sigma_{15} = (2\ 4\ 3)}$	$\sigma_{21} = (1\ 4\ 3\ 2)$
$\sigma_4 = (1\ 4)$	$\underline{\sigma_{10} = (1\ 3\ 2)}$	$\sigma_{16} = (1\ 2\ 3\ 4)$	$\underline{\sigma_{22} = (1\ 2)\ (3\ 4)}$
$\sigma_5 = (2\ 3)$	$\underline{\sigma_{11} = (1\ 3\ 4)}$	$\sigma_{17} = (1\ 2\ 4\ 3)$	$\underline{\sigma_{23} = (1\ 3)\ (2\ 4)}$
$\sigma_6 = (2\ 4)$	$\underline{\sigma_{12} = (1\ 4\ 2)}$	$\sigma_{18} = (1\ 3\ 2\ 4)$	$\underline{\sigma_{24} = (1\ 4)\ (2\ 3)}$

Aufgabe 6.11 b) und c)

b) Geben Sie zu den Elementen (1 3 2 4) und (1 3)(2 4) die Inversen an.

$(1\ 3\ 2\ 4)^{-1} = (4\ 2\ 3\ 1) = (1\ 4\ 2\ 3)$
$(1\ 3)(2\ 4)^{-1} = (1\ 3)(2\ 4)$

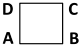
c) Zeigen Sie an den Elementen von b), dass in S_4 das Kommutativitätsgesetz nicht gilt.

$(1\ 3\ 2\ 4) \circ (1\ 3)(2\ 4) = (1\ 2)$
$(1\ 3)(2\ 4) \circ (1\ 3\ 2\ 4) = (3\ 4)$
Die Ergebnisse sind nicht gleich.

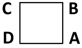
Aufgabe 6.11 d)

d) Für besonders interessierte Knobler:
Stellen Sie analog zum Isomorphismus zwischen Π_3 und S_3 die den Permutationen von S_4 entsprechenden Symmetrien eines Quadrats A, B, C, D dar, und geben Sie für jede Symmetrie an, wie Sie diese durch Hintereinanderschaltung von Rotationen und Spiegelungen erreichen.

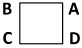
Jede Symmetrie eines Quadrats ist eine Rotation oder Spiegelung:



Die Identität entspricht $\sigma_1 = (1)$.

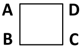


Die Rotation um 90° entspricht $\sigma_{16} = (1234)$.

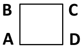


Die Rotation um 180° entspricht $\sigma_{23} = (13)(24)$.

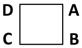
Aufgabe 6.11 d)



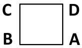
Die Rotation um 270° entspricht $\sigma_{21} = (1432)$.



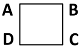
Die Spiegelung an der Diagonalen $\overline{AC}$ entspricht $\sigma_6 = (24)$.



Die Spiegelung an der Diagonalen $\overline{BD}$ entspricht $\sigma_3 = (13)$.



Die Spiegelung an der Mittelsenkrechten entspricht $\sigma_{22} = (12)(34)$.



Die Spiegelung an der Mittelwaagerechten entspricht $\sigma_{24} = (14)(23)$.

Die Hintereinanderschaltung dieser Symmetrien ergibt wieder eine dieser Symmetrien, d.h. diese 8 Permutationen bilden eine Untergruppe von S_4.

Die Untergruppe der Symmetrien eines Quadrats enthält 4 gerade $(\sigma_1, \sigma_{23}, \sigma_{22}, \sigma_{24})$ und 4 ungerade $(\sigma_{16}, \sigma_{21}, \sigma_6, \sigma_3)$ Permutationen. Anders als beim gleichseitigen Dreieck entsprechen hier nicht die Rotationen der einen und die Spiegelungen der anderen Kategorie, sondern mischen sich darin.

Die Menge der geraden Permutationen dieser Symmetrien bildet wiederum eine Untergruppe aus 4 Elementen, welche isomorph zu $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \oplus_2)$ ist, da jedes Element zu sich selbst invers ist.

Betrachten Sie die Gruppe S_5.

a) Geben Sie an, wie viele Elemente diese Gruppe hat.
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

b) Geben Sie ein Element maximaler Ordnung an.
Weisen Sie die Ordnung explizit nach, und begründen Sie informell, warum es kein Element größerer Ordnung geben kann.

$(123)(45)$, *Ordnung* $= 6$:

$(123)(45) \circ (123)(45) = (132)$
$(123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) = (45)$
$(123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) = (123)$
$(123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) = (132)(45)$
$(123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) = (1)$

Begründung:

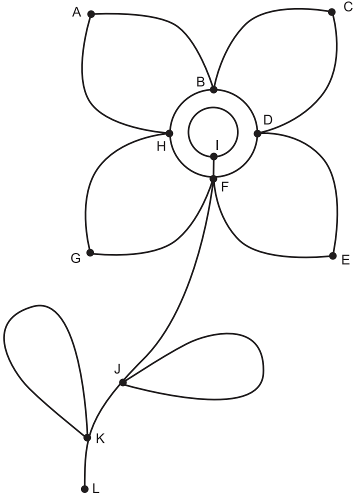
Jeder n-elementige Zyklus verschwindet bei n-facher Hintereinanderschaltung, weil dann jedes Element wieder auf sich selbst abgebildet wird.

Die Ordnung einer Permutation ist also das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der jeweiligen Anzahl der Elemente aller disjunkter Zyklen.

Die Summe der Elemente aller disjunkter Zyklen einer Permutation der Menge M ist maximal $|M|$, bei S_5 also 5.

Die maximale Ordnung bei $|M| = 5$ ist $kgV(2,3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Bilden Sie die Adjazenzmatrix und die Adjazenzliste des folgenden Graphen:

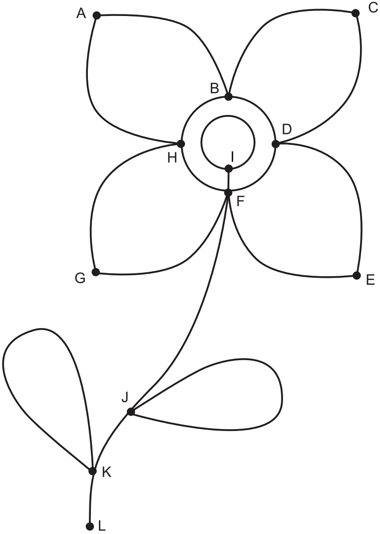


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Bilden Sie die Adjazenzmatrix:

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

... und die Adjazenzliste:



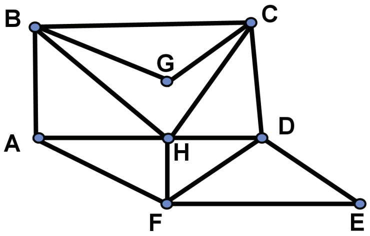
Ecke	benachbarte Ecken
A	B, H
B	A, C, D, H
C	B, D
D	B, C, E, F
E	D, F
F	D, E, G, H, I, J
G	F, H
H	A, B, F, G
I	F, I
J	F, J, K, L
K	J, K, L
L	K

Aufgabe 7.1 b) und c)

b) Begründen Sie, warum der Graph keinen Eulerkreis hat.
Die Ecken I und L haben die Valenzen 3 und 1, welche ungerade sind. Damit kann es keinen Eulerkreis geben, aber immerhin einen Eulerweg, denn alle anderen Valenzen sind gerade.
Beachte: Schlingen (hier bei I, J, K) zählen doppelt, weil die Ecke Anfangs- und Endecke der Schlinge ist.

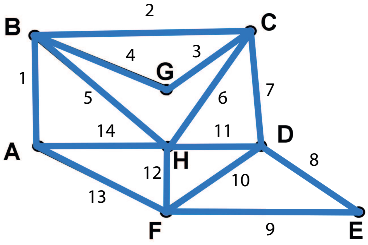
c) Fügen Sie möglichst wenige Kanten hinzu, sodass der Graph einen Eulerkreis hat.
Füge die Kante $\overline{IL}$ hinzu, und alle Valenzen sind gerade. Damit gibt es einen Eulerkreis.

a) Finden Sie im folgenden Graphen einen Eulerkreis (oder Eulerweg) und einen Hamiltonkreis, falls das möglich ist. Begründen Sie gegebenenfalls, warum es nicht geht.

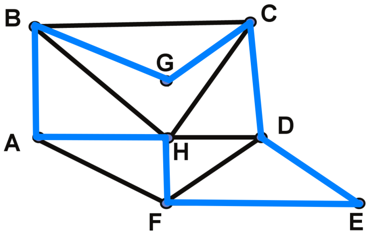


Aufgabe 7.2 a)

Eulerweg:



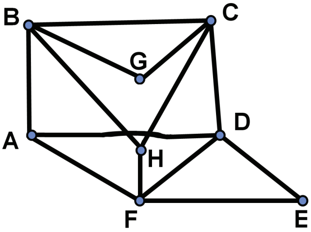
Hamiltonkreis:



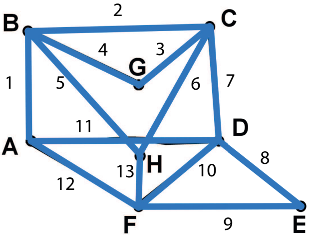
Nur Eulerweg zwischen A und H wegen ungerader Valenz möglich.
z.B.: A-B-C-G-B-H-C-D-E-F-D-H-F-A-H

Aufgabe 7.2 b)

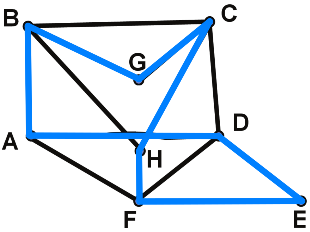
b) Ergibt der folgende Graph andere Resultate?



Eulerweg:



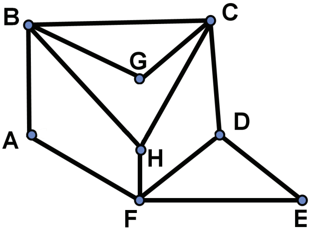
Hamiltonkreis:



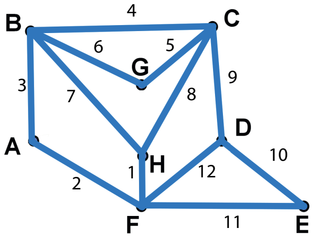
Nur Eulerweg zwischen A und H wegen ungerader Valenz möglich.
z.B.: A-B-C-G-B-H-C-D-E-F-D-A-F-H

Aufgabe 7.2 c)

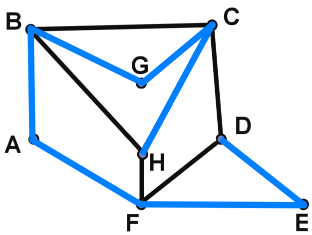
c) Ergibt der folgende Graph andere Resultate?



Eulerweg:



Hamiltonweg:

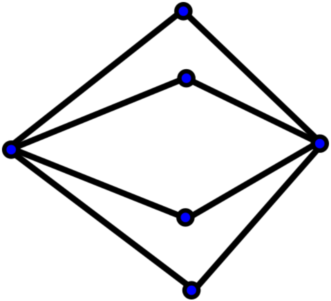


Nur Eulerweg zwischen H und D wegen ungerader Valenz möglich.
z.B.: H-F-A-B-C-G-B-H-C-D-E-F-D

Da E, A und G den Grad 2 haben sind für den Hamiltonweg die ineinandergreifenden Teilabschnitte D-E-F, F-A-B und B-G-C vorgegeben. Duch hinzufügen von C-H entsteht nur ein Hamiltonweg aber kein Hamiltonkreis.

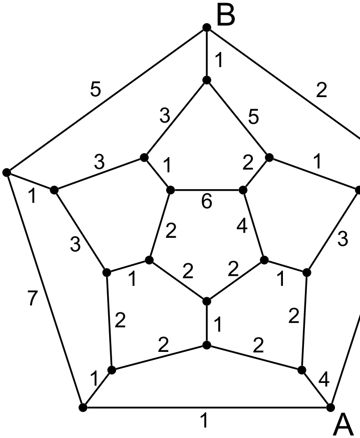
Aufgabe 7.3

Konstruieren Sie eine Graphen, der einen Eulerkreis, aber keinen Hamiltonkreis hat.

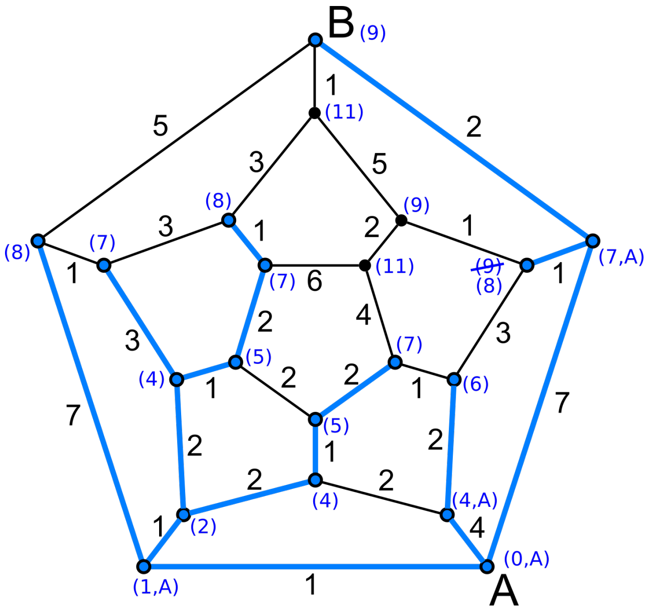


Aufgabe 7.4

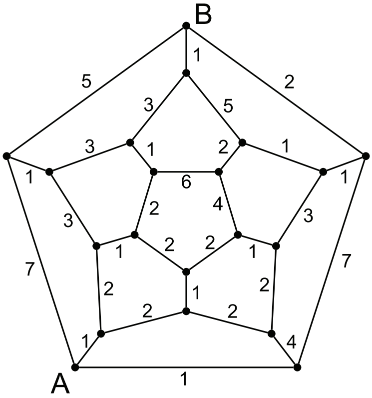
Berechnen Sie in dem gewichteten Dodekaedergraphen den kürzesten Weg von A nach B mit dem Algorithmus von Dijkstra. Sie müssen nicht alle Zwischenschritte angeben, aber zeichnen Sie die kürzesten Wege zu allen Punkten ein, die dieser Algorithmus berechnet hat.

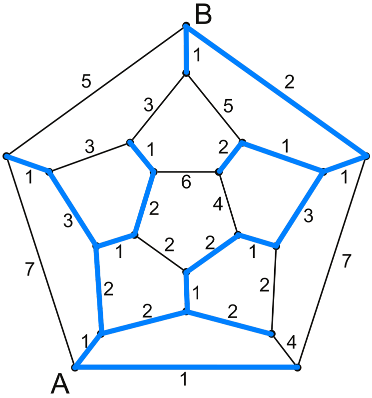


Aufgabe 7.4


B (9)
1
(11)
5
2
3
5
(8)
(9)
3
1
2
1
(8)
(7)
(7,A)
1
(7)
6
(11)
~~(9)~~
(8)
1
2
4
3
3
(7)
(5)
(4)
2
2
1
1
(6)
7
7
(5)
2
1
2
2
2
(4,A)
(4)
1
(2)
4
(0,A)
(1,A)
1
A

Bestimmen Sie in dem bewerteten Dodekaedergraphen einen minimalen spannenden Baum nach dem Algorithmus von Kruskal.





Aufgabe 7.6

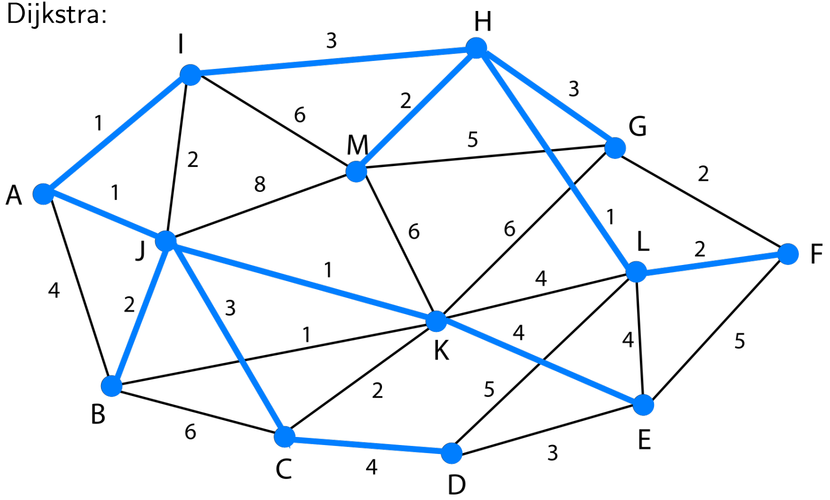
Bilden Sie im Übungsgraphen von Abbildung 7.43 Gerüste, die folgende Größen minimieren:

a) Gesamtlänge der Wege von A zu allen anderen Ecken (Dijkstra)
b) Gesamtlänge aller Kanten (Kruskal)

Berechnen Sie die Gesamtlänge der Wege von A sowie aller Kanten für beide Gerüste.

Aufgabe 7.6 a)

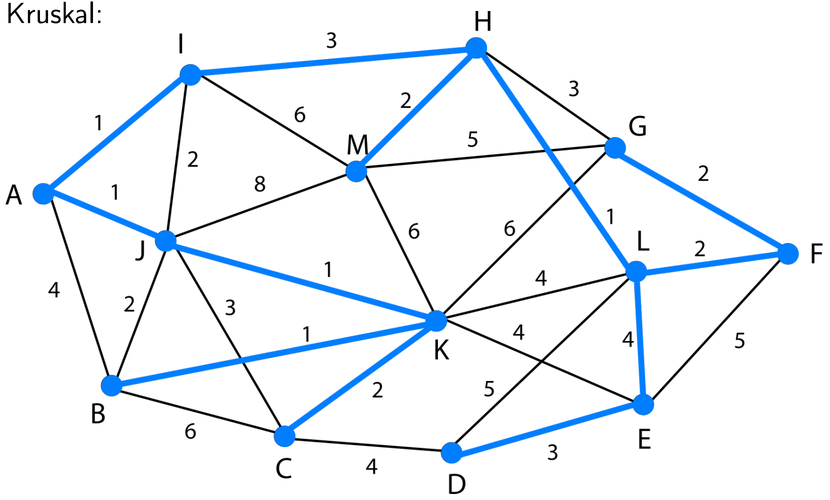
Dijkstra:



Gesamtlänge der Wege von A: 54

Gesamtlänge aller Kanten: 27

Kruskal:

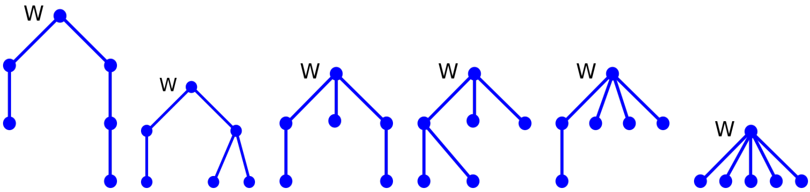


Gesamtlänge der Wege von A: 63

Gesamtlänge aller Kanten: 23

Aufgabe 7.7

Zeichnen Sie alle Bäume mit 6 Ecken und wählen Sie für jeden Baum eine Wurzel so aus, dass seine maximale Suchtiefe minimal ist. Geben Sie diese Suchtiefe an.



Suchtiefe:

3 2 2 2 2 1

Aufgabe 7.8

Zeichnen Sie:

a) einen binären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.

b) einen ternären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.

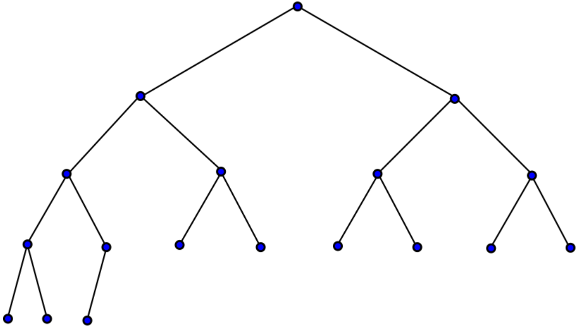
c) einen 5-ären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.

d) Lösen Sie die Aufgaben a) bis c) mit 18 Blättern statt Knoten.

Aufgabe 7.8 a)

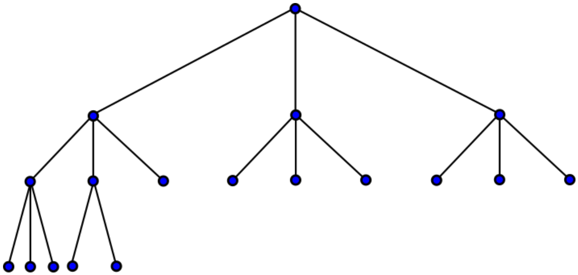
Zeichnen Sie:

a) einen binären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.



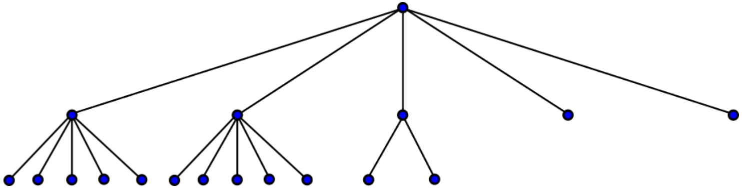
Zeichnen Sie:

b) einen ternären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.



Zeichnen Sie:

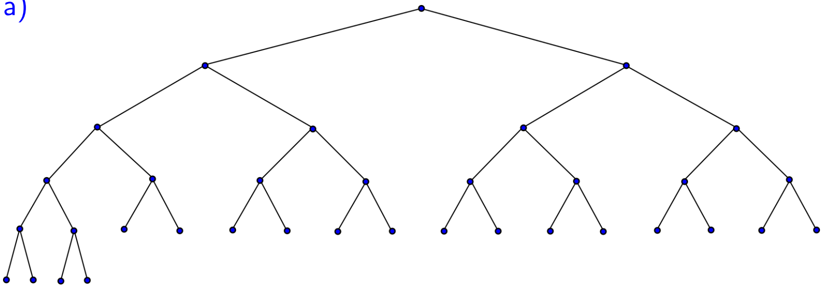
c) einen 5-ären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.



Zeichnen Sie:

d) Lösen Sie die Aufgaben a) bis c) mit 18 Blättern statt Knoten.

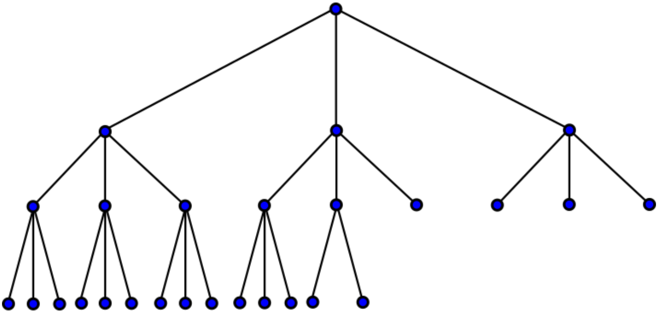
a)



Zeichnen Sie:

d) Lösen Sie die Aufgaben a) bis c) mit 18 Blättern statt Knoten.

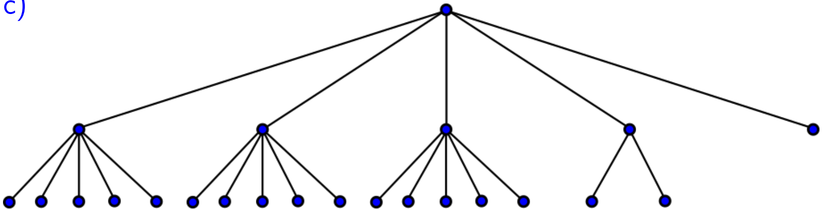
b)



Zeichnen Sie:

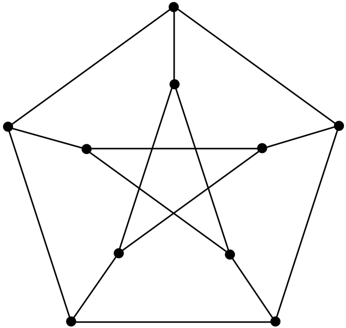
d) Lösen Sie die Aufgaben a) bis c) mit 18 Blättern statt Knoten.

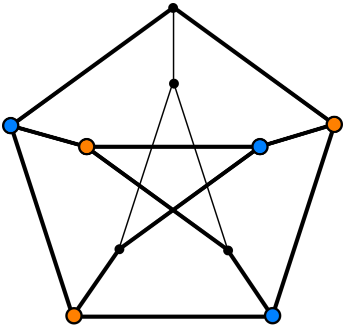
c)



Aufgabe 7.9

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Kuratowski, dass der Petersengraph nicht planar ist.





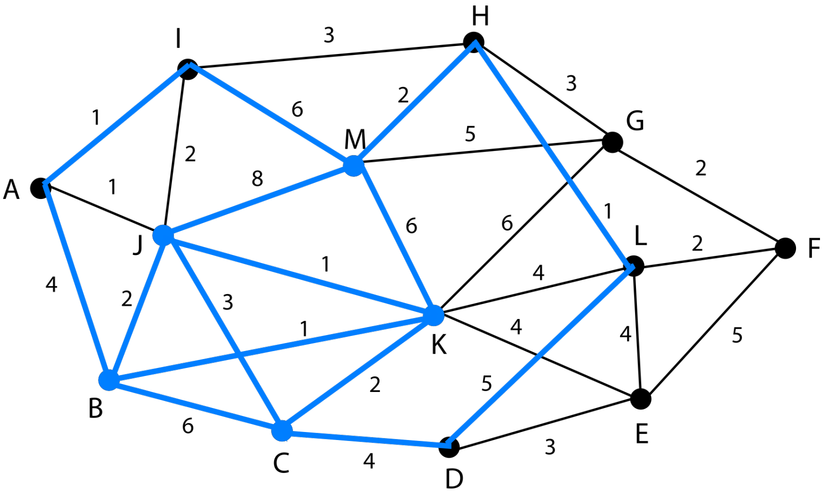
Der Petersengraph enthält als Untergraph eine Unterteilung von $K_{3,3}$.

Ist der Übungsgraph von Abbildung 7.43 planar? Begründen Sie Ihre Antwort!

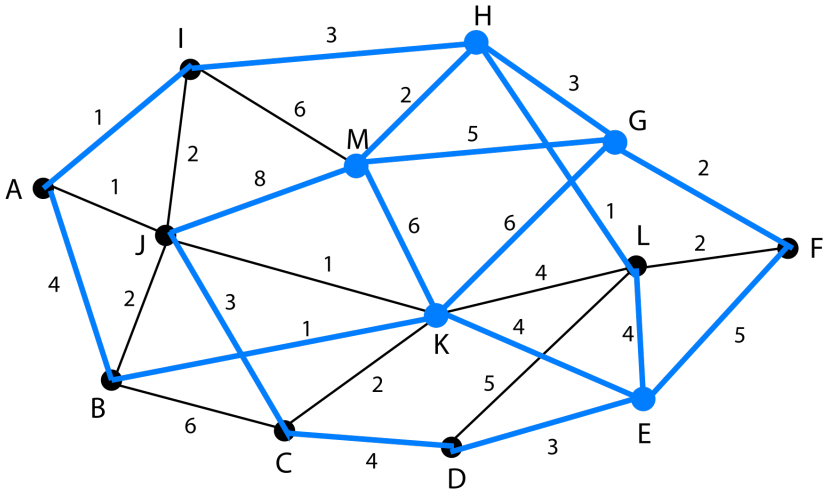
Der Graph ist nicht planar, weil er Unterteilungen von K_5 und $K_{3,3}$ enthält.

Aufgabe 7.10 a)

Unterteilung von K_5: J-M-K-C-B

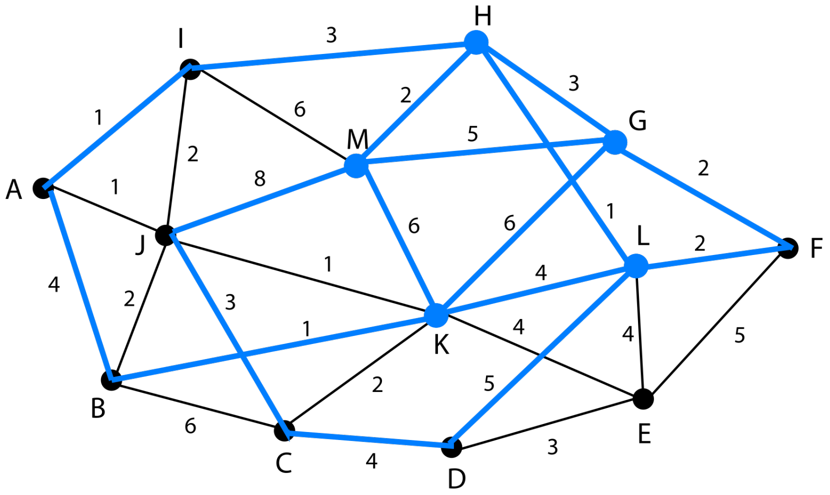


Unterteilung von K_5: M-H-G-E-K



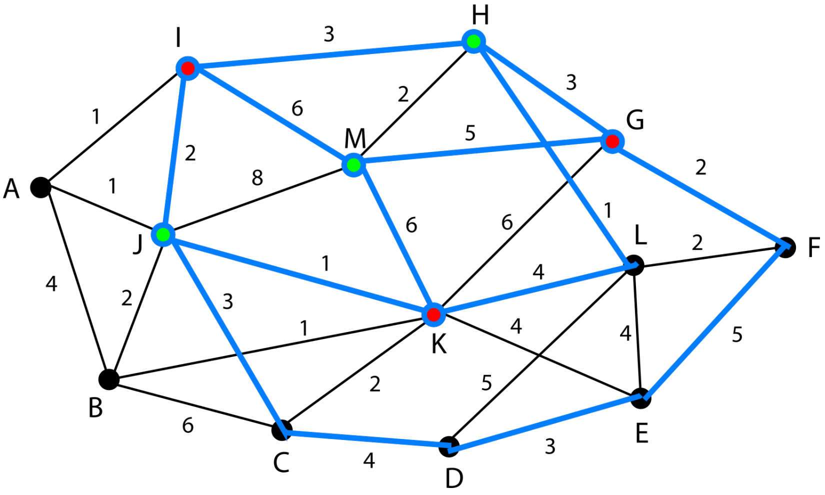
Aufgabe 7.10 a)

Unterteilung von K_5: M-H-G-L-K



Aufgabe 7.10 a)

Unterteilung von $K_{3,3}$: J,M,H und I,K,G



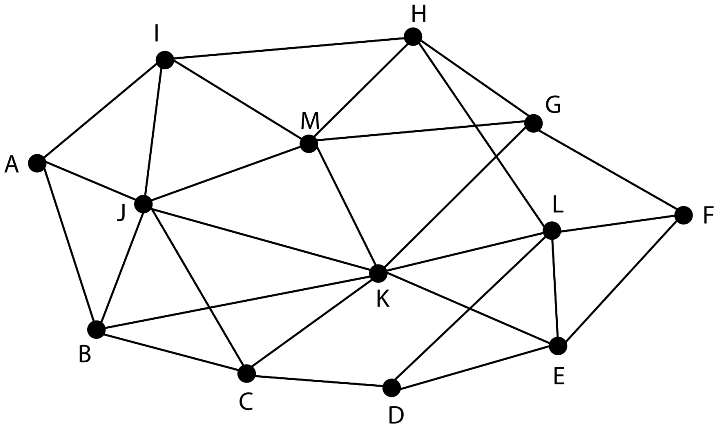
Aufgabe 7.10 b)

Falls die Antwort in der vorherigen Aufgabe ”ja” war, fügen Sie Kante(n) hinzu, sodass der Graph nicht mehr planar ist. Falls die Antwort ”nein” war, entfernen Sie Kanten, sodass der Graph planar ist. Begründen Sie wiederum Ihre Antwort!

Da der ursprüngliche Graph nicht planar ist, müssen also Kanten entfernt werden, bis er planar ist.

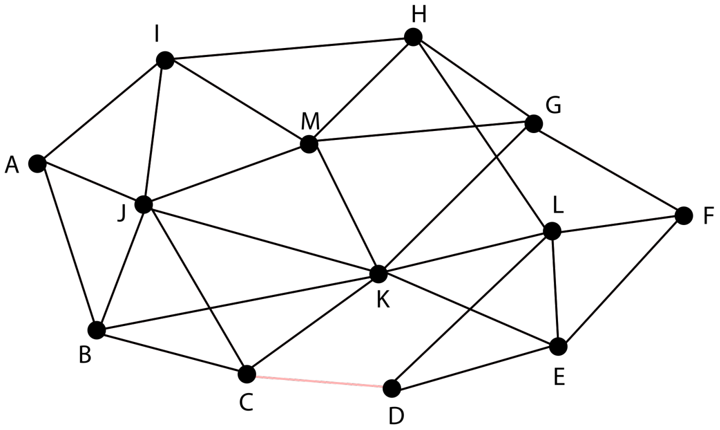
Lösung mit der Entfernung von nur einer Kante

ursprünglicher Graph:

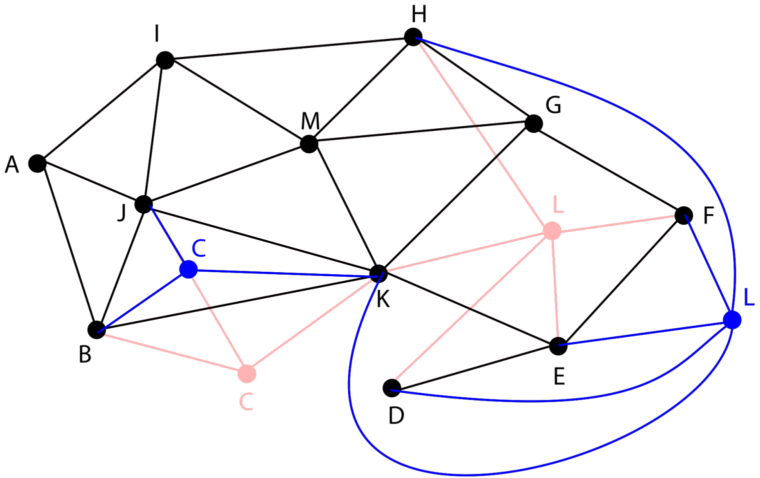


Aufgabe 7.10 b)

Entfernung der Kante C-D:

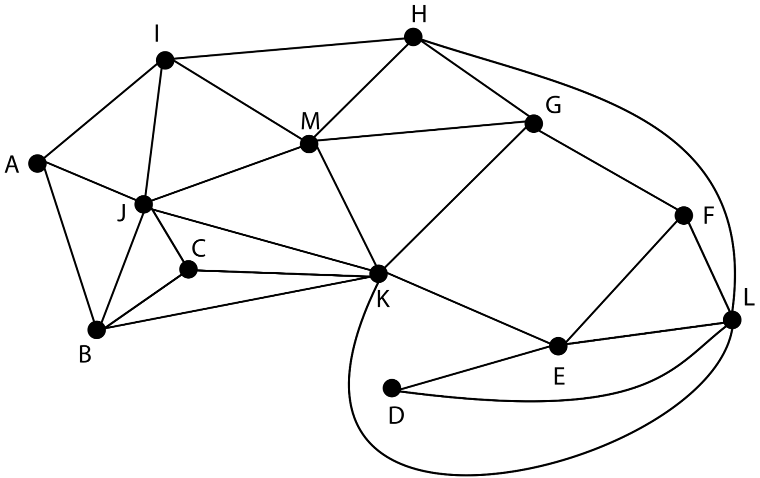


Überkreuzungsfreie Zeichnung:

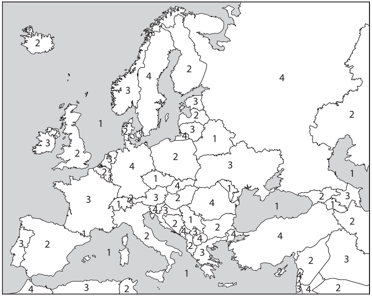


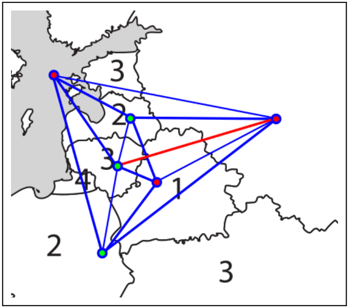
Aufgabe 7.10 b)

Der Graph ist planar.



Zeigen Sie anhand der Europakarte, dass der duale Graph, der entsteht, wenn man die Königsberger Exklave und Russland als ein Land betrachtet, das im dualen Graphen nur durch eine Ecke repräsentiert wird, nicht planar ist.

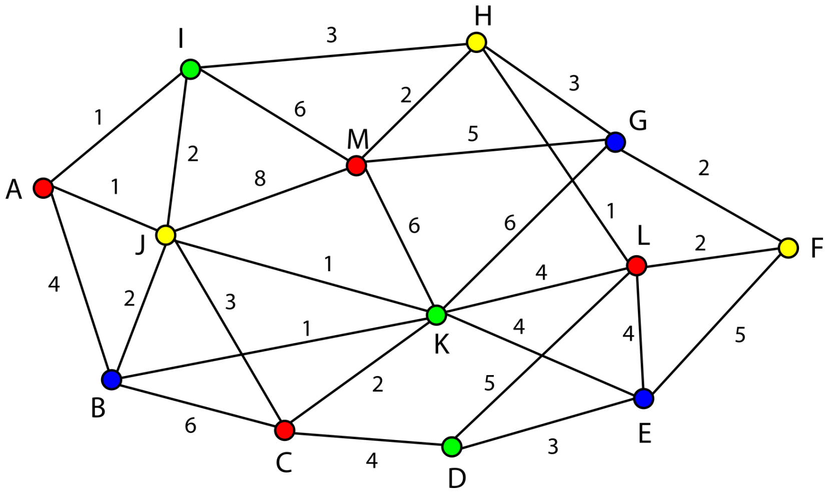




Der duale Graph enthält als Untergraph ein $K_{3,3}$ mit Lettland, Litauen und Polen auf der einen und Russland, Weißrussland und der Ostsee auf der anderen Seite.

Färben Sie die Ecken des Übungsgraphen von Abbildung 7.43 so, dass benachbarte Ecken verschiedene Farben haben. Versuchen Sie mit einer minimalen Anzahl von Farben auszukommen.

Die nachfolgende Lösung kommt mit 4 Farben aus. Mit weniger Farben geht es nicht, weil der Graph den K_4 mit den Ecken B, C, K, J als Teilgraphen enthält.



H
I
3
3
1
6
2
G
M
5
2
A
1
2
8
6
6
1
L
2
F
J
1
4
4
2
3
4
1
4
5
K
2
5
B
6
E
C
4
3
D

Aufgabe 7.13

Färben Sie die Bundesländer von Deutschland so, dass benachbarte Länder unterschiedliche Farben bekommen, aber insgesamt möglichst wenige Farben verbraucht werden.