Lösungen zum Buch Diskrete Mathematik mit Grundlagen

Jörg Porath, redigiert von Sebastian Iwanowski

Formen Sie aus den vorgegebenen aussagenlogischen Formeln natürlichsprachige Sätze.

Beispiel:	Formel:	$(p \rightarrow q)$
	Aussage 1:	p := "'Der Gegner hat mehr Tore geschossen."'
	Aussage 2:	q := "'Wir haben verloren."'
	Lösung:	Falls der Gegner mehr Tore geschossen hat, haben wir verloren.

1. $(\neg p \rightarrow \neg q)$
   p: n ist durch 3 teilbar.
   q: n ist durch 12 teilbar.

   Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, ist n auch nicht durch 12 teilbar.

2. $(\neg p \leftrightarrow q)$
   p: Es ist Tag.
   q: Es ist Nacht.

   Genau dann, wenn es nicht Tag ist, ist es Nacht.

3. $((p \vee \neg q) \rightarrow r)$
   p: Das Auto ist kaputt.
   q: Das Auto hat Benzin im Tank.
   r: Man muss das Auto schieben.

   Wenn das Auto kaputt ist oder kein Benzin im Tank hat, muss man das Auto schieben.

Aufgabe 1.3

Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden de Morganschen Regel der Aussagenlogik mit Hilfe einer Wahrheitstafel:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	w	w	w	w

Spalte 4 (linke Seite) und Spalte 7 (rechte Seite) haben dieselben Wahrheitswerte.

Aufgabe 1.4

Beweisen Sie die Gültigkeit einer Variante des Distributivgesetzes der Aussagenlogik mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Spalte 5 (linke Seite) und Spalte 8 (rechte Seite) haben dieselben Wahrheitswerte

Aufgabe 1.6

Beweisen Sie das logische Prinzip des indirekten Beweises entweder mit einer Wahrheitstafel oder durch Anwendung anderer Logikgesetze.

zu zeigen: $(\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q) \implies p$

$$
\begin{array}{lll}
& (\neg p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q) & \\
\underset{(1.2)}{\implies} & (\neg p \to q) \wedge (q \to p) & \text{(Kontraposition)} \\
\underset{(1.12)}{\implies} & \neg p \to p & \text{(Kettenschluss)} \\
\underset{(1.3)}{\implies} & \neg\neg p \vee p & \text{(Ersetzen der Implikation durch } \neg \text{ und } \vee\text{)} \\
\underset{(1.6)}{\implies} & p \vee p \implies p \quad \checkmark & \text{(doppelte Negation)}
\end{array}
$$

zu zeigen: $(\neg p \to q) \land (\neg p \to \neg q) \implies p$

p	q	$(\neg p \to q)$	$(\neg p \to \neg q)$	$(\neg p \to q) \land (\neg p \to \neg q)$
w	w	w	w	**w**
w	f	w	w	**w**
f	w	w	f	**f**
f	f	f	w	**f**

$$(\neg p \to q) \land (\neg p \to \neg q) \implies p \checkmark$$

Aufgabe 1.7

1. Betrachten Sie die Aussageform:

$$\forall x \in D \; \exists y \in D : 2 \cdot y = x$$

Setzen Sie für D eine der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ein, sodass diese Aussageform eine wahre Aussage wird, und setzen Sie für D eine dieser Zahlenmengen ein, sodass diese Aussageform eine falsche Aussage wird.

wahre Aussagen (da es zu jedem beliebigen x ein $y = \frac{x}{2}$ gibt):
$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} : 2 \cdot y = x$
$\forall x \in \mathbb{C} \; \exists y \in \mathbb{C} : 2 \cdot y = x$

falsche Aussagen (da es zu allen ungeraden x kein $y = \frac{x}{2}$ aus der jeweiligen Menge gibt):
$\forall x \in \mathbb{N} \; \exists y \in \mathbb{N} : 2 \cdot y = x$
$\forall x \in \mathbb{Z} \; \exists y \in \mathbb{Z} : 2 \cdot y = x$

Aufgabe 1.7

2. Versuchen Sie dasselbe wie zuvor mit den Aussageformen:

$$\forall x \in D\ \exists y \in D : 2 \cdot x = y \quad \text{und} \quad \exists x \in D\ \forall y \in D : 2 \cdot x = y$$

Begründen Sie, warum bei diesen beiden Aussageformen immer nur derselbe Wahrheitswert erzielt werden kann.

Die Aussageform $\forall x \in D\ \exists y \in D : 2 \cdot x = y$ ist beim Einsetzen jeder der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wahr, da es zu jedem beliebigen x immer auch ein doppelt so großes y gibt.

Die Aussageform $\exists x \in D\ \forall y \in D : 2 \cdot x = y$ ist hingegen bei jeder der Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ falsch, da in keiner der Mengen eine Zahl existiert, deren Doppeltes allen Zahlen der ganzen jeweiligen Menge entspricht.

Aufgabe 2.2

Geben Sie folgende Mengen in Elementschreibweise an:

1. $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$
   $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2. $B = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A : x^2 = y\}$
   $B = \{-3, -\sqrt{8}, -\sqrt{7}, -\sqrt{6}, -\sqrt{5}, -2, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3\}$

3. $C = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A : y^2 = x\}$
   $C = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$

4. $D = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A : x \cdot y = -x\}$
   $D = \{0\}$

5. $E = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A : y = -x^2 - 1\}$
   $E = \{\}$

Aufgabe 2.3

Es sei die folgende Universalmenge $\Omega = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ gegeben. Gegeben seien die folgenden Mengen A, B und C:

$$A = \{p, q, r, s\} \qquad B = \{r, u, w\} \qquad C = \{q, s, t, v\}$$

Geben Sie die Elemente der folgenden Mengen an:

1. $B \cap C = \{\}$
2. $A \cup C = \{p, q, r, s, t, v\}$
3. $\overline{C} = \{p, r, u, w\}$
4. $A \cap B \cap C = \{\}$
5. $(A \cup B) \cap (A \cap C) = \{q, s\}$
6. $\overline{(A \cup B)} = \{t, v\}$
7. $A \setminus C = \{p, r\}$
8. $A \triangle C = \{p, r, t, v\}$
9. $\mathfrak{P}(B) = \{\emptyset, \{r\}, \{u\}, \{w\}, \{r, u\}, \{r, w\}, \{u, w\}, \{r, u, w\}\}$
10. $\mathfrak{P}(A \setminus (B \setminus C)) = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, s\}, \{q, s\}, \{p, q, s\}\}$

Aufgabe 2.4

Bestimmen Sie, ob wahr oder falsch:

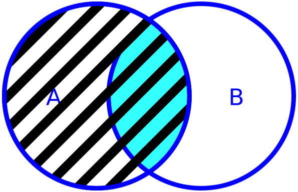
1. $\{\} \subseteq \{2, 4, 6\}$ wahr
2. $\{3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ wahr
3. $\{2\} \subseteq \{2, 4, 6\}$ wahr
4. $\{2\} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ falsch
5. $\{1\} \subseteq \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ falsch
6. $\{2, 4, 6\} \subseteq \{\{2\}, 3, 4, \{5\}, 6\}$ falsch
7. $(3, 4) = (4, 3)$ falsch
8. $(1, 2) \in \{(3, 1), (2, 1), (4, 8)\}$ falsch
9. $\{(1, 2), (3, 2)\} \subseteq \{(3, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 8), (3, 2)\}$ wahr

Aufgabe 2.5

Sind die folgenden Aussagen immer wahr? Belegen Sie Ihre Antwort durch jeweils ein oder mehrere (abstrakte) Venn-Diagramme. A, B, C können dabei beliebige endliche Mengen sein.

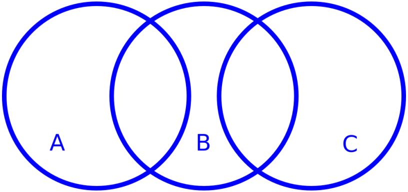
1. $(A \cap B) \setminus A = \emptyset$

   immer wahr,
   da $(A \cap B) \subseteq A$



2. $(A \cap B \cap C) \neq \emptyset$

   nicht immer wahr



Aufgabe 2.6

Stimmen die folgenden Aussagen für eine beliebige Menge M? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \in \mathfrak{P}(M)$
2. $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \subseteq \mathfrak{P}(M)$

Ja. Die Schnittmenge zweier Mengen ist jeweils Teilmenge der beiden Mengen.
Somit ist $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \subseteq \mathfrak{P}(M)$
Und da $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \subseteq M$ ist $(M \cap \mathfrak{P}(M)) \in \mathfrak{P}(M)$ weil alle Teilmengen von M Elemente von $\mathfrak{P}(M)$ sind.

Beispiel:
$M = \{1, \{1\}\} \implies \mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}\}$
$M \cap \mathfrak{P}(M) = \{\{1\}\}$
$\{\{1\}\} \in \mathfrak{P}(M)$ und $\{\{1\}\} \subseteq \mathfrak{P}(M)$

Aufgabe 2.7

Geben Sie $\{3, 0, 1, 0, 1, 3\} \times \{301, 103, 301\}$ explizit an.

$\{3, 0, 1, 0, 1, 3\} = \{0, 1, 3\}$
$\{301, 103, 301\} = \{103, 301\}$

$\{3, 0, 1, 0, 1, 3\} \times \{301, 103, 301\} = \{0, 1, 3\} \times \{103, 301\}$
$= \{(0, 103), (0, 301), (1, 103), (1, 301), (3, 103), (3, 301)\}$

Aufgabe 2.8

Geben Sie eine Menge an, von der (Max, Mustermann, 1960, Musterstadt) ein Element sein könnte.

{(Hans, Hansen, 1980, Hamburg),
(Max, Mustermann, 1960, Musterstadt),
(Jörg, Porath, 1978, Heide)}

oder allgemeiner:

$Vornamen \times Nachnamen \times \mathbb{N} \times Stadtnamen$

wobei *Vornamen* die Menge aller Vornamen ist,
Nachnamen die Menge aller Nachnamen
und *Stadtnamen* die Menge der Namen aller Städte.

Aufgabe 2.11

Betrachten Sie die Menge

$$M = \{\text{Berlin}, \text{London}, \text{Deutschland}, \text{Paris}, \text{Frankreich}, \text{Hamburg}\}$$

und die Relation $\sim$ auf M mit:

$$\begin{aligned} x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad & x \text{ liegt im Land } y \text{ oder} \\ & x \text{ enthält als Stadt } y \text{ oder} \\ & x \text{ liegt im selben Land wie } y \text{ oder} \\ & x \text{ enthält dieselben Städte wie } y \end{aligned}$$

Begründen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie eine Aufteilung der Menge M an, die zeigt, welche Elemente zueinander in Relation stehen.

3 Äquivalenzklassen:

$M_{\text{Deutschland}} = \{\text{Deutschland, Berlin, Hamburg}\}$

$M_{\text{England}} = \{\text{London}\}$

$M_{\text{Frankreich}} = \{\text{Frankreich, Paris}\}$

Die Relation $\sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv und somit eine Äquivalenzrelation:

Reflexivität: Jede Stadt liegt im selben Bundesland, wie sie selbst. Und jedes Land enthält die selben Städte wie es selbst.
$\forall x \in M : x \sim x$

Symmetrie: Wenn eine Stadt in einem Land liegt, enthält dieses Land auch diese Stadt und umgekehrt. Wenn eine Stadt im selben Land wie eine andere Stadt liegt, gilt dies auch umgekehrt. Da eine Stadt immer nur in einem Land liegt, steht kein Land mit einem anderen außer mit sich selbst in Relation, wodurch die Symmetrie automatisch gegeben ist. $\forall x, y \in M : x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

Transitivität: Da jede Stadt eindeutig einem Land zuzuordnen ist, wird auch die Transitivität nicht verletzt.
$\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$

Aufgabe 2.12

Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation R, die aus 3 Äquivalenzklassen besteht. Dabei soll die erste Äquivalenzklasse aus genau einem Element, die zweite aus genau zwei Elementen und die dritte aus genau drei Elementen bestehen. Definieren Sie die Relation $R \subset M \times M$ durch Angabe der Äquivalenzklassen. Geben Sie die Äquivalenzklassen explizit an, und schreiben Sie dann die Relation als Teilmenge des Kreuzprodukts explizit auf.

- $A_1 = \{1\}$
- $A_2 = \{2, 3\}$
- $A_3 = \{4, 5, 6\}$
- $R = \{$(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)$\} \subset M \times M$

Aufgabe 2.13 a)

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation auf M, welche die Elemente $(1, 3)$ und $(5, 3)$ enthält, aber nicht die Elemente $(1, 2)$ und $(4, 5)$.

   $$R = \{(1,3), (3,1), (5,3), (3,5), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,5), (5,1)\}$$

2. Geben Sie die Äquivalenzklassen an.

   $M_1 = \{1, 3, 5\}$
   $M_2 = \{2, 4\}$

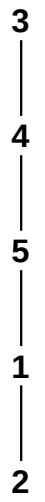
Aufgabe 2.13 b)

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

a) Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation auf M, welche die Elemente $(1, 3)$ und $(5, 3)$ enthält, aber nicht die Elemente $(1, 2)$ und $(4, 5)$.

- $R \subset M \times M = \{(1{,}1), (2{,}2), (3{,}3), (4{,}4), (5{,}5), (1{,}3), (5{,}3), (2{,}1), (5{,}4), (2{,}5), (2{,}4), (2{,}3), (1{,}5), (1{,}4), (4{,}3)\}$

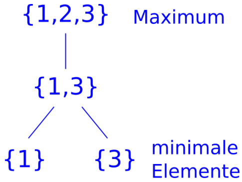
b) Zeichnen Sie das entsprechende Hasse-Diagramm.



Aufgabe 2.14

Gegeben sei die Menge $M = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
Bilden Sie die Relation $\{(x, y) \in M \times M \mid x \subseteq y\}$. Zeigen Sie, dass es sich hier um eine Ordnungsrelation handelt, und zeichnen Sie das zugehörige Hassediagramm.

$$\{(x, y) \in M \times M \mid x \subseteq y\} =$$
$$\{(\{1\}, \{1\}), (\{1\}, \{1, 3\}), (\{1\}, \{1, 2, 3\}),$$
$$(\{3\}, \{3\}), (\{3\}, \{1, 3\}), (\{3\}, \{1, 2, 3\}),$$
$$(\{1, 3\}, \{1, 3\}), (\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}),$$
$$(\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\})\}$$



Die Relation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv aber nicht linear und somit eine partielle Ordnungsrelation:

Reflexivität: $\forall x \in M : x \subseteq x$

Antisymmetrie: $\forall x, y \in M : x \subseteq y \wedge y \subseteq x \implies x = y$

Transitivität: $\forall x, y, z \in M : x \subseteq y \wedge y \subseteq z \implies x \subseteq z$

keine Linearität: $\{1\} \not\subseteq \{3\} \wedge \{3\} \not\subseteq \{1\}$

Aufgabe 2.16

Betrachten Sie die Relation $R =$ "‘ist Teilmenge von"’ auf $\{E, O, U, H, G\}$, wobei

$$E = \{x \mid \exists y : x \text{ ist Elternteil von } y\}$$
$$O = \{x \mid \exists y : x \text{ ist Großvater oder Großmutter von } y\}$$
$$U = \{x \mid \exists y : x \text{ ist Urgroßvater oder Urgroßmutter von } y\}$$
$$H = \{x \mid \exists y : x \text{ und } y \text{ haben genau 1 Elternteil gemeinsam}\}$$
$$G = \{x \mid \exists y : x \text{ und } y \text{ haben mindestens 1 Elternteil gemeinsam}\}.$$

E,O,U,H und G sind definiert für alle Menschen, die leben bzw. gelebt haben.
Geben Sie an, ob R total (linear) ist oder nicht. Erstellen Sie ein Hassediagramm und kennzeichnen Sie die maximalen und minimalen Elemente bzw. das Maximum und Minimum.
Tipp: Es ist zu beachten, dass zwar alle Menschen genau zwei Eltern haben, aber nicht notwendigerweise Kinder.

Aufgabe 2.16

$R =$ "'ist Teilmenge von"' auf $\{E, O, U, H, G\}$, wobei

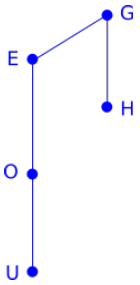
$$E = \{x \mid \exists y : x \text{ ist Elternteil von } y\}$$
$$O = \{x \mid \exists y : x \text{ ist Großvater oder Großmutter von } y\}$$
$$U = \{x \mid \exists y : x \text{ ist Urgroßvater oder Urgroßmutter von } y\}$$
$$H = \{x \mid \exists y : x \text{ und } y \text{ haben genau 1 Elternteil gemeinsam}\}$$
$$G = \{x \mid \exists y : x \text{ und } y \text{ haben mindestens 1 Elternteil gemeinsam}\}.$$

G soll die Menge der Geschwister [1] sein und H die Menge der Halbgeschwister.
Auf jeden Fall ist R ist nicht linear, da H in keiner Teilmengenrelation zu E, O und U steht und auch nicht umgekehrt:
Jemand, der Kinder hat, muss keine Halbgeschwister haben, und jemand, der Halbgeschwister hat, muss keine Kinder haben.

---

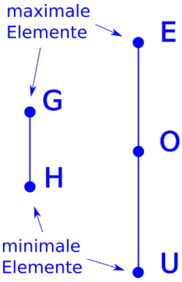
[1] Diese Definition von G ist nicht ganz korrekt, wie später gezeigt wird

Das Hasse-Diagramm hängt davon ab, wie man G interpretiert:
Wenn man die Definition von G so wie in dieser Aufgabe festlegt, dann gehört jeder Mensch zu G, weil er mit sich selbst mindestens 1 Elternteil gemeinsam hat.
Dann ist das die Lösung für das Hasse-Diagramm:



Aufgabe 2.16

Wenn man G dagegen als Menge von Personen definiert, die echte Geschwister haben, und festlegt, dass keiner sein eigener Bruder oder Schwester ist, dann ist das die Lösung für das Hasse-Diagramm:



Aufgabe 2.17

Entscheiden Sie, welche der folgenden Relationen auf der Menge aller Menschen

- Äquivalenzrelationen sind,
- Halbordnungen oder totale Ordnungen sind,
- Funktionen sind.

Zeigen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist (durch Beweis oder Widerlegung; Sie können dazu natürliche Sprache verwenden).

1. x hat dieselben Eltern wie y
2. x ist ein Bruder von y
3. x ist größer oder kleiner als y
4. x ist wenigstens so intelligent wie y
5. x hat y als Mutter

1. x hat dieselben Eltern wie y

   - Falls *beide* Eltern dieselben seien sollen: Äquivalenzrelation, da reflexiv (jeder hat dieselben selben Eltern wie er selbst), symetrisch und transitiv (Jeder hat nur ein eindeutiges Paar Eltern. Geschwister haben alle dieselben Eltern unabhängig von der Reihenfolge ihrer Betrachtung) Falls nur ein Elternteil gemeinsam ist, kann die Transitivität verletzt sein.
   - keine Ordnungsrelation, da nicht antisymmetrisch (zwei verschiedene Geschwister stehen in wechselseitiger Relation)
   - keine Funktion, da zwar linksvollständig (jeder hat dieselben Eltern wie mindestens er selbst) aber nicht rechtseindeutig (jeder, der kein Einzelkind ist, steht mit sich selbst und all seinen Geschwistern in Relation)

Aufgabe 2.17 b)

2. x ist ein Bruder von y

   - keine Äquivalenzrelation, da nicht reflexiv (niemand ist sein eigener Bruder) und nicht symmetrisch (y kann eine Schwester von ihrem Bruder x sein). Transitivität ist gegeben bei Vollgeschwistern, aber nicht bei Halbgeschwistern.
   - keine Ordnungsrelation, da nicht reflexiv (s.o.) und auch nicht antisymmetrisch (zwei verschiedene Brüder stehen wechselseitig in Relation)
   - keine Funktion, da nicht linksvollständig (Einzelkinder und Mädchen haben keine Partner) und auch nicht rechtseindeutig (Brüder von mehreren Geschwistern)

Aufgabe 2.17 c)

3. x ist größer oder kleiner als y
   - keine Äquivalenzrelation, da nicht reflexiv (gleichgroß ist ausgeschlossen) und auch nicht transitiv (x kann größer sein als y, y kleiner als z und x genauso groß wie z), aber symmetrisch (wenn x kleiner ist als y, ist y automatisch größer als x und umgekehrt)
   - keine Ordnungsrelation, da nicht reflexiv und auch nicht transitiv (s.o.) Zudem auch nicht antisymmetrisch: Nur zwei verschieden große Menschen können wechselseitig in Relation stehen.
   - keine Funktion, da zwar meistens linksvollständig (solange sich zu jedem Menschen ein Mensch finden lässt, der kleiner oder größer ist), aber nicht rechtseindeutig (es gibt viele unterschiedlich große Menschen)

Aufgabe 2.17 d)

4. x ist wenigstens so intelligent wie y
   - keine Äquivalenzrelation, da zwar reflexiv (jeder ist genauso und somit wenigstens so intelligent wie er selbst), aber nicht symmetrisch (unterschiedlich intelligente Menschen). Transitivität ist gegeben. (Wenn x wenigstens so intelligent ist wie y und y wenigstens so intelligent wie z, dann ist x auch wenigstens so intelligent wie z.)
   - keine Ordnungsrelation, obwohl reflexiv und transitiv (s.o.) und zudem linear (es lassen sich immer zwei beliebige Menschen bezüglich ihrer Intelligenz vergleichen). Aber nicht antisymmetrisch, da zwei verschiedene Menschen gleich intelligent sein können und so wechselseitig in Relation stehen.
   - keine Funktion, da zwar aufgrund der Reflexivität linksvollständig, aber nicht rechtseindeutig (bis auf max. eine Ausnahme sind alle Menschen weingstens so intelligent wie mehrere Menschen)

5. x hat y als Mutter
   - keine Äquivalenzrelation, da nicht reflexiv (niemand ist seine eigene Mutter), nicht symmetrisch (niemand hat sein Kind als Mutter) und auch nicht transitiv (die Mutter der Mutter ist nicht die Mutter, sondern die Großmutter)
   - keine Ordnungsrelation, da nicht reflexiv und nicht transitiv (s.o) aber antisymmetrisch (da eine Mutter niemals ihr eigenes Kind als Mutter hat, können Mutter und Kind auch nicht identisch sein)
   - Funktion, da linksvollständig und rechtseindeutig (jeder Mensch hat genau eine Mutter)

Aufgabe 2.18

Betrachten Sie die Mengen $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $N = \{a, b, c\}$
Es sei $f : M \to N$ eine Funktion mit $f(1) = a$, $f(2) = b$.

a) Geben Sie weitere Funktionswerte an, so dass f alle Funktionseigenschaften erfüllt.
$f(3) = c$, $f(4) = a$, $f(5) = b$

b) Schreiben Sie f in Relationsdarstellung (als Teilmenge des Kreuzprodukts) auf.
$F \subset M \times N = \{$(1,a), (2,b), (3,c), (4,a), (5,b)$\}$

Aufgabe 2.19

Betrachten Sie folgende Mengen und begründen Sie, welche eine Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist und welche nicht:

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 1\}$
   Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da linksvollständig und rechtseindeutig: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$, so dass $x + y = 1$ gilt. Dabei ist $y = 1 - x$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$
   Keine Funktion: Nicht linksvollständig, da für $|x| \in \mathbb{R} > 1$ kein $y \in \mathbb{R}$ definiert ist ($y^2 < 0$). Zudem nicht rechtseindeutig, da für $-1 < x < 1$ jeweils zwei y mit unterschiedlichem Vorzeichen existieren.
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^3 + y^3 = 1\}$
   Funktion, wie bei a) aber mit $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

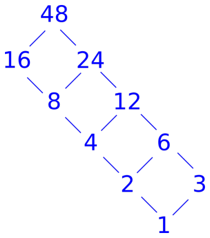
Aufgabe 2.20

Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$.
Betrachten Sie die Relation
$R = \{(x, y) \in M \times M \mid x \text{ ist Teiler von } y\}$

1. Untersuchen Sie, ob R eine Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation (partiell oder total) ist.

   partielle Ordnungsrelation (reflexiv, antisymmetrisch, transitiv, aber nicht linear)

2. Geben Sie gegebenenfalls die Äquivalenzklassen oder das Hasse-Diagramm an.
   Hier gibt es also ein Hasse-Diagramm (siehe nebenstehend).



3. Begründen Sie, warum R keine Funktion ist, und geben Sie eine Teilmenge von R an, die eine Funktion ist.

nicht rechtseindeutig, z.B. $(2, 4)$ und $(2, 6)$

$R' = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (6, 12), (8, 16), (12, 24), (24, 48)\}$

Aufgabe 2.21

Gegeben seien folgende Mengen und Relationen:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$
$$R_1 = \{(1, a); (2, b); (3, c); (4, b); (5, b)\} \quad \subseteq A \times B$$
$$R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (a, 4); (a, 5)\} \quad \subseteq B \times A$$
$$R_3 = \{(1, b); (3, c)\} \quad \subseteq A \times B$$

a) Bilden Sie:

$$R_4 = R_1 \circ R_2 = \{(a,a);\ (a,b);\ (a,c)\}$$
$$R_5 = R_2 \circ R_1 = \{(1,1)\}$$
$$R_6 = R_3 \circ R_2 = \{(a,b);\ (a,c)\}$$
$$R_7 = R_2 \circ R_3 = \{\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \; B = \{a, b, c\}$$

b) Geben Sie für jede der 7 Relationen an, ob sie eine Funktion ist und begründen Sie Ihre Antwort.

$R_1 = \{(1, a); (2, b); (3, c); (4, b); (5, b)\}$
linksvollständig und rechtseindeutig $\Longrightarrow$ Funktion
$R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (a, 4); (a, 5)\}$
nicht linksvollständig aber rechtseindeutig $\Longrightarrow$ keine Funktion
$R_3 = \{(1, b); (3, c)\}$
nicht linksvollständig aber rechtseindeutig $\Longrightarrow$ keine Funktion
$R_4 = R_1 \circ R_2 = \{(a, a); (a, b); (a, c)\}$
weder linksvollständig noch rechtseindeutig $\Longrightarrow$ keine Funktion
$R_5 = R_2 \circ R_1 = \{(1, 1)\}$
nicht linksvollständig aber rechtseindeutig $\Longrightarrow$ keine Funktion
$R_6 = R_3 \circ R_2 = \{(a, b); (a, c)\}$
weder linksvollständig noch rechtseindeutig $\Longrightarrow$ keine Funktion
$R_7 = R_2 \circ R_3 = \{\}$
nicht linksvollständig aber rechtseindeutig $\Longrightarrow$ keine Funktion

Aufgabe 2.21

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \; B = \{a, b, c\}$$

c) Geben Sie ferner an, welche der 7 Relationen injektiv bzw. linkseindeutig und welche surjektiv bzw. rechtsvollständig ist.

$R_1 = \{(1, a); (2, b); (3, c); (4, b); (5, b)\}$
nicht injektiv aber surjektiv
$R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (a, 4); (a, 5)\}$
nicht linkseindeutig aber rechtsvollständig
$R_3 = \{(1, b); (3, c)\}$
linkseindeutig aber nicht rechtsvollständig
$R_4 = R_1 \circ R_2 = \{(a, a); (a, b); (a, c)\}$
nicht linkseindeutig aber rechtsvollständig
$R_5 = R_2 \circ R_1 = \{(1, 1)\}$
linkseindeutig aber nicht rechtsvollständig
$R_6 = R_3 \circ R_2 = \{(a, b); (a, c)\}$
weder linkseindeutig noch rechtsvollständig
$R_7 = R_2 \circ R_3 = \{\}$
linksvollständig aber nicht rechtsvollständig

Aufgabe 2.21

d) Bilden Sie für alle 7 Relationen die Inverse. Ist eine der Relationen eine umkehrbare Funktion?

$$R_1 = \{(1,a);(2,b);(3,c);(4,b);(5,b)\}$$
$$R_1^{-1} = \{(a,1);(b,2);(c,3);(b,4);(b,5)\}$$
$$R_2 = \{(a,1);(a,2);(a,3);(a,4);(a,5)\}$$
$$R_2^{-1} = \{(1,a);(2,a);(3,a);(4,a);(5,a)\}$$
$$R_3 = \{(1,b);(3,c)\}$$
$$R_3^{-1} = \{(b,1);(c,3)\}$$
$$R_4 = R_1 \circ R_2 = \{(a,a);(a,b);(a,c)\}$$
$$R_4^{-1} = \{(a,a);(b,a);(c,a)\}$$
$$R_5 = R_2 \circ R_1 = \{(1,1)\}$$
$$R_5^{-1} = \{(1,1)\}$$
$$R_6 = R_3 \circ R_2 = \{(a,b);(a,c)\}$$
$$R_6^{-1} = \{(b,a);(c,a)\}$$
$$R_7 = R_2 \circ R_3 = \{\}$$
$$R_7^{-1} = \{\}$$

Keine umkehrbare Funktion!

Aufgabe 2.22

Gegeben sind drei Grundmengen

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$N = \{a, b, c, d\}$$
$$P = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Definieren Sie zwei Relationen $R_1 \subset M \times N$ und $R_2 \subset N \times P$ so, dass wenigstens eine der beiden keine Funktion ist aber die Komposition $R_2 \circ R_1$ trotzdem eine Funktion ist.

- $R_1 = \{(1, a); (2, a); (3, b); (4, c); (\mathbf{5}, b); (\mathbf{5}, c)\} \subset M \times N$
  linksvollständig aber nicht rechtseindeutig
- $R_2 = \{(a, 3); (b, 5); (c, 5)\} \subset N \times P$
  nicht linksvollständig aber rechtseindeutig
- $R_2 \circ R_1 = \{(1, 3); (2, 3); (3, 5); (4, 5); (5, 5)\} \subset M \times P$
  linksvollständig und rechtseindeutig $\Longrightarrow$ Funktion

Gegeben sind folgende Funktionen:

Untersuchen Sie diese jeweils auf Injektivität und Surjektivität. Begründen Sie Ihre Aussagen (Nachweis oder Gegenbeispiel!). Geben Sie (falls möglich) die Umkehrfunktion an.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + x - 2$

$$y = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + x - 2 - y$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2 + y} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + y}$$

$\Longrightarrow$ für $y < -\frac{9}{4}$ nicht definiert $\Longrightarrow$ nicht surjektiv

$\Longrightarrow$ für $y > -\frac{9}{4}$ zwei Urbilder $\Longrightarrow$ nicht injektiv

Aufgabe 2.23

Gegeben sind folgende Funktionen:

Untersuchen Sie diese jeweils auf Injektivität und Surjektivität.
Begründen Sie Ihre Aussagen (Nachweis oder Gegenbeispiel!).
Geben Sie (falls möglich) die Umkehrfunktion an.

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $f(x) = \frac{3}{(x+2)} + 1$

$$y = \frac{3}{(x+2)} + 1 \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3}{(x+2)} \underset{x \neq -2}{\Leftrightarrow} (y-1) \cdot (x+2) = 3$$
$$\Leftrightarrow x + 2 = \frac{3}{y-1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{y-1} - 2$$

$\Leftarrow$: Alle Werte $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ werden über $x = \frac{3}{(y-1)} - 2$ mit einem $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ erreicht $\rightarrow$ surjektiv

$\Rightarrow$: Für jedes $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gibt es nur den eindeutigen Wert $x = \frac{3}{(y-1)} - 2 \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow$ injektiv

$f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ mit $f^{-1}(x) = \frac{3}{x-1} - 2$

Aufgabe 2.24

Gegeben seien die Mengen $M = \{a, c, e, g, i\}$ und $N = \{b, d, f, h\}$. Gegeben seien ferner zwei Funktionen $F : M \to N$ und $G : N \to M$.

1. Welche Eigenschaft (injektiv, surjektiv, bijektiv, linksvollständig, rechtseindeutig) hat F garantiert nicht? Welche hat G nicht? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.
   $F : M \to N$ kann nicht injektiv sein, da M mächtiger ist als N, also mindestens zwei Elemente von M auf das gleiche Element von N abgebildet werden.
   $G : N \to M$ kann nicht surjektiv sein, da M mächtiger ist als N, also auf mindestens ein Element von M keines von N abgebildet wird.
   Beide Funktionen sind somit auch nicht bijektiv.
2. Konstruieren Sie zwei Funktionen F und G, die wenigstens alle anderen oben genannten Eigenschaften erfüllen.
   $F : M \to N = \{(a, b), (c, d), (e, f), (g, h), (i, h)\}$
   $G : N \to M = \{(b, c), (d, e), (f, g), (h, i)\}$

Aufgabe 2.25

Begründen Sie, warum es in der Theorie keine bijektive Abbildung $F : Personen \to Kalenderdaten$ – in Form von (Tag, Monat) – zwischen den Mitgliedern einer Fußballmannschaft und dem zugehörigen Geburtsdatum geben kann.
Kann zumindest theoretisch wenigstens eine der beiden Eigenschaften Injektivität oder Surjektivität erreicht werden?

- $|Kalenderdaten| > |Personen|$ $(366 > 11)$
  Damit kann es nach dem Schubfachprinzip keine surjektive Abbildung geben, da mit nur 11 Personen nicht alle 366 Tage erreicht werden können.
- Wenn alle Mannschaftsmitglieder an unterschiedlichen Tagen Geburtstag haben, ist die Abbildung immerhin injektiv.

Zeigen Sie, dass die Menge aller Quadratzahlen und die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig sind.

Zwei (unendliche) Mengen sind gleichmächtig, genau dann, wenn eine bijektive Funktion existiert, die die eine auf die andere abbildet.
Sei M die Menge aller Quadratzahlen, dann ist $f : \mathbb{N} \to M$ mit $f(n) = n^2$ eine bijektive Funktion, mit der alle natürlichen Zahlen auf alle Quadratzahlen abgebildet werden.
Surjektivität: Die Funktion f erreicht nicht alle natürlichen Zahlen, sondern nur die Quadratzahlen. Das ist aber genau M. Also wird jedes Element aus M erreicht.
Injektivität: Sei $f(n) = f(p)$. Dann ist $n^2 = p^2$ und somit $n = p$.
$f(n) = n^2$ ist also eine bijektive Funktion von der Menge der natürlichen Zahlen nach der Menge aller Quadratzahlen und somit sind beide Mengen gleichmächtig.

Aufgabe 2.27

Gegeben sei eine bijektive Abbildung $F : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ nach dem Cantorschen Diagonalverfahren.
Hierbei enthält $\mathbb{N}$ die Null und $\mathbb{Q}^+$ ist die Menge der positiven rationalen Zahlen.

$$\mathbb{Q}^+ = \{1, \tfrac{1}{2}, 2, 3, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}, 4, 5, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{2}, 6, 7, \tfrac{5}{3}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{1}{7}, \ldots\}$$

1. Geben Sie die Elemente $F(5)$, $F(10)$, $F(15)$ und $F(20)$ an.

   Da $F(0) = 1$ gilt:
   $F(5) = \frac{1}{4}$ $\quad$ $F(10) = \frac{1}{5}$ $\quad$ $F(15) = \frac{5}{2}$ $\quad$ $F(20) = \frac{1}{7}$

2. Bestimmen Sie die Indizes n mit $F(n) = x$ für $x = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3$

   $F(6) = \frac{2}{3}$ $\quad$ $F(7) = \frac{3}{2}$ $\quad$ $F(2) = 2$ $\quad$ $F(3) = 3$

Aufgabe 2.29

Geben Sie alle Elemente der Booleschen Schaltfunktionen für $n = 2$ an.

$\mathfrak{B}_2 = \{f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}\} =$
$\{(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (0,1,1,1), (1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,1,1,1)\}$

Hierbei entspricht die erste Position dem Funktionswert von $(0,0)$, die zweite dem von $(0,1)$, die dritte dem von $(1,0)$ und die vierte dem von $(1,1)$. f_0 ist die Nullfunktion und f_{15} die Einsfunktion.

x_1, x_2	$0,0$	$0,1$	$1,0$	$1,1$
f_0	0	0	0	0
f_1	0	0	0	1
f_2	0	0	1	0
f_3	0	0	1	1
f_4	0	1	0	0
f_5	0	1	0	1
f_6	0	1	1	0
f_7	0	1	1	1
f_8	1	0	0	0
f_9	1	0	0	1
f_{10}	1	0	1	0
f_{11}	1	0	1	1
f_{12}	1	1	0	0
f_{13}	1	1	0	1
f_{14}	1	1	1	0
f_{15}	1	1	1	1

Betrachten Sie die Menge der Booleschen Schaltfunktionen für $n = 3$:
Wählen Sie sich zwei beliebige verschiedene Elemente aus und weisen Sie für diese eine der de Morganschen Regeln nach.
Hinweis: Zeigen Sie das Gesetz für alle 8 verschiedenen Argumente der Schaltfunktionen. Es sind also insgesamt 16 Werte auszurechnen (linke und rechte Seite). Geben Sie jeweils die Zwischenwerte an.

Menge der Booleschen Schaltfunktionen für $n = 3$:

$$\mathfrak{B} = \{f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}\} \text{ mit den Operationen i), ii), iii):}$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{i)} & \sim f(x1, x2, x3) & = & 1 - f(x1, x2, x3) \\ \text{ii)} & (f \oplus g)(x1, x2, x3) & = & max\{f(x1, x2, x3), g(x1, x2, x3)\} \\ \text{iii)} & (f \otimes g)(x1, x2, x3) & = & min\{f(x1, x2, x3), g(x1, x2, x3)\} \end{array}$$

Sei $p(x_1, x_2, x_3) \mathrel{\widehat{=}} (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$
und $q(x_1, x_2, x_3) \mathrel{\widehat{=}} (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$.

<u>Zu zeigen:</u> $\sim (p \oplus q) = \sim p \otimes \sim q$

<u>linke Seite:</u>

$$p \oplus q \mathrel{\widehat{=}} (1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$$
$$\sim (p \oplus q) \mathrel{\widehat{=}} (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

<u>rechte Seite:</u>

$$\sim p \mathrel{\widehat{=}} (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$
$$\sim q \mathrel{\widehat{=}} (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$$
$$\sim p \otimes \sim q \mathrel{\widehat{=}} (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$\sim (p \oplus q) = \sim p \otimes \sim q \quad \checkmark$

a) Zeigen Sie, dass in der Teiler-Algebra für $n = 30$ beide Distributivgesetze für die Elemente 2, 3 und 6 erfüllt sind.

$T_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
$k \oplus l = ggT(k, l)$
$k \otimes l = kgV(k, l)$

- $p \otimes (q \oplus r) = (p \otimes q) \oplus (p \otimes r)$

  $p := 2 \quad q := 3 \quad r := 6$

  linke Seite: $kgV\big(2, ggT(3, 6)\big) = kgV(2, 3) = 6$

  rechte Seite: $ggT\big(kgV(2, 3), kgV(2, 6)\big) = ggT(6, 6) = 6$

  linke Seite $=$ rechte Seite $\checkmark$

a) Zeigen Sie, dass in der Teiler-Algebra für $n = 30$ beide Distributivgesetze für die Elemente 2, 3 und 6 erfüllt sind.

$$T_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$
$$k \oplus l = ggT(k, l)$$
$$k \otimes l = kgV(k, l)$$

- $p \oplus (q \otimes r) = (p \oplus q) \otimes (p \oplus r)$

  $p := 2 \quad q := 3 \quad r := 6$

  linke Seite: $ggT\big(2, kgV(3, 6)\big) = ggT(2, 6) = 2$

  rechte Seite: $kgV\big(ggT(2, 3), ggT(2, 6)\big) = kgV(1, 2) = 2$

  linke Seite $=$ rechte Seite $\checkmark$

Aufgabe 2.31

c) Zeigen Sie, dass die Distributivgesetze auch für $n = 12$ gelten.

$T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$k \oplus l = ggT(k, l)$
$k \otimes l = kgV(k, l)$

- $p \otimes (q \oplus r) = (p \otimes q) \oplus (p \otimes r)$

  $p := 2 \quad q := 3 \quad r := 6$

  linke Seite: $kgV\big(2, ggT(3, 6)\big) = kgV(2, 3) = 6$

  rechte Seite: $ggT\big(kgV(2, 3), kgV(2, 6)\big) = ggT(6, 6) = 6$

  linke Seite $=$ rechte Seite $\checkmark$

c) Zeigen Sie, dass die Distributivgesetze auch für $n = 12$ gelten.

$T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$k \oplus l = ggT(k, l)$
$k \otimes l = kgV(k, l)$

- $p \oplus (q \otimes r) = (p \oplus q) \otimes (p \oplus r)$

  $p := 2 \quad q := 3 \quad r := 6$

  linke Seite: $ggT\big(2, kgV(3, 6)\big) = ggT(2, 6) = 2$

  rechte Seite: $kgV\big(ggT(2, 3), ggT(2, 6)\big) = kgV(1, 2) = 2$

  linke Seite $=$ rechte Seite $\checkmark$

c) Warum ist die Teiler-Algebra T_{12} dennoch keine Boolesche Algebra?

12 hat die Primfaktorzerlegung $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Die 2 ist ein doppelter Primfaktor, und daher sind die Gesetze vom inversen Element für die 2 verletzt:
$\sim 2 = \frac{12}{2} = 6$
$2 \oplus \sim 2 = ggT\left(2, 6\right) = 2 \neq 1 \equiv 1$

$2 \otimes \sim 2 = ggT\left(2, 6\right) = 6 \neq 12 \equiv 0$

Aufgabe 3.1

Betrachten Sie die folgenden Aussagen und Begriffe und ordnen Sie ein, was eine Definition, was ein Satz, was ein Axiom und was ein Beweis ist[2]:

a) Eine Boolesche Algebra ist eine Menge mit 3 Operationen und dem Kommutativgesetz, Distributivgesetz, Eigenschaft der neutralen Elemente und Eigenschaft der inversen Elemente.

$\gg$ Definition

b) Das Distributivgesetz besagt folgendes:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$\gg$ Definition

[2] Zum Teil können Sie pro Teilaufgabe mehrere Zuordnungen machen.

c) Das Distributivgesetz spielt für eine Boolesche Algebra die Rolle "Axiom"

d) Die deMorganschen Regeln gelten in einer Booleschen Algebra.

$\gg$ Satz

e) In einer Booleschen Algebra gelten die Regeln der Nullmultiplikation.

$\gg$ Satz

f) Die Teiler-Algebra T_n besteht aus den Teilern der Zahl n sowie 3 Operationen darauf.

$\gg$ Definition

Aufgabe 3.1

g) Die Teiler-Algebra T_n ist eine Boolesche Algebra, wenn n keine mehrfachen Primfaktoren enthält.

$\gg$ Satz

h) 24 enthält mehrfache Primfaktoren, denn $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.

$\gg$ Beweis, Satz

Konstruieren Sie eine Nachfolgefunktion σ für $\mathbb{N}$, in der genau 0 und 8 keinen unmittelbaren Vorgänger haben. Welches Peano-Axiom müssen Sie zwingend verletzen?
Versuchen Sie, alle anderen Peano-Axiome weiterhin zu erfüllen.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13...\}$

mit $\sigma = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),$
$(6,7),\mathbf{(7{,}9),(8{,}10)},(9,11),(10,12),(11,13)...\} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Axiom 5 muss zwingend verletzt werden: Wenn die 8 keinen unmittelbaren Vorgänger hat, kann sie auch nicht durch eine endlich häufige Anwendung der Nachfolgerlation σ aus 0 erzeugt werden.

Aufgabe 3.3

Konstruieren Sie eine Menge "natürlicher Zahlen" derart, dass Peano-Axiom 4 verletzt ist, die anderen aber alle erfüllt sind.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2\}$ *mit* $\sigma \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$

$0 \in \sigma(\mathbb{N})$ Damit ist Axiom 4 verletzt.

Aufgabe 3.5

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

$$\sum_{i=0}^{0} 2^{-i} = 2^0 = 1$$

$\checkmark$

$$2 - \frac{1}{2^0} = 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$$

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n+1} 2^{-i} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^{-i} = \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} + 2^{-(n+1)} \underset{I.Ann.}{=} 2 - \frac{1}{2^n} + 2^{-(n+1)}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}} \checkmark$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

$$\sum_{i=0}^{n} 4^i = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

$$\sum_{i=0}^{0} 4^i = 4^0 = 1$$

$$\checkmark$$

$$\frac{4^{(0+1)} - 1}{3} = \frac{4 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} 4^i = \frac{4^{n+2}-1}{3}$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 4^i = \sum_{i=0}^{n} 4^i + 4^{n+1} \underset{i.A.}{=} \frac{4^{n+1}-1}{3} + 4^{n+1}$$

$$= \frac{4^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+1} - 1}{3} = \frac{4 \cdot 4^{n+1} - 1}{3} = \frac{4^{n+2}-1}{3} \checkmark$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für eine beliebige Zahl q:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

$$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1$$

$\checkmark$

$$\frac{q^{(0+1)} - 1}{q - 1} = \frac{q - 1}{q - 1} = 1 \quad |q \neq 1$$

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} \underset{i.A.}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1}$$

$$= \frac{q^{n+1} + (q-1)\cdot q^{n+1} - 1}{q-1} = \frac{q \cdot q^{n+1} - 1}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1} \checkmark$$

Aus welcher Zahlenmenge darf q stammen? $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Aufgabe 3.9

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists k_n \in \mathbb{N} : 7^n = 6 \cdot k_n + 1$$

Hinweis: Versuchen Sie im Beweis, k_{n+1} aus k_n zu erzeugen.

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

$$7^0 = 6 \cdot 0 + 1$$
$$\implies k_0 = 0 \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N} : \exists k_{n+1} \in \mathbb{N} : 7^{n+1} = 6 \cdot k_{n+1} + 1$

Beweis:

$$\begin{aligned} 7^{n+1} = 7^n \cdot 7 \underset{i.A.}{=} (6 \cdot k_n + 1) \cdot 7 &= 6 \cdot 7k_n + 7 \\ &= 6 \cdot 7k_n + 6 + 1 = 6 \cdot (7k_n + 1) + 1 \end{aligned}$$

$$k_{n+1} = 7k_n + 1 \implies \quad 6 \cdot (7k_n + 1) + 1 = 6 \cdot k_{n+1} + 1$$

$$k_n \in \mathbb{N} \land 7 \in \mathbb{N} \land 1 \in \mathbb{N} \implies (7k_n + 1) \in \mathbb{N} \implies k_{n+1} \in \mathbb{N} \checkmark$$

Aufgabe 3.12

Beweisen Sie, dass $F(n+2) = 1 + F(0) + \ldots + F(n)$ für die Fibonaccizahlen $F(n)$ und $n \geq 0$ ist.

1. **Induktionsverankerung** $A(0)$:

rechte Seite:

$$1 + F(0) = 1 + 0 = 1$$

linke Seite:

$$F(0+2) = F(2) \underset{gem.Def.}{=} F(0) + F(1) = 0 + 1 = 1$$

Beide Seiten sind gleich. ✓

Aufgabe 3.12

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen: $F(n+1+2) = 1 + F(0) + \ldots + F(n+1)$

Beweis:

$$F(n+1+2) = F(n+3) \underset{gem.Def.}{=} F(n+2) + F(n+1)$$

$$F(n+2) \underset{i.A.}{=} 1 + F(1) + \ldots + F(n)$$

$$\implies F(n+2) + F(n+1) = 1 + F(1) + \ldots + F(n) + F(n+1) \checkmark$$

Aufgabe 3.13

Eine Bienenkönigin hat als Eltern eine Königin und eine Drohne. Eine Drohne hat als Eltern nur eine Königin (sie entschlüpft einem unbefruchteten Ei).

Die n-te Vorfahrensgeneration einer Biene b sei als Menge von Bienen folgendermaßen definiert:

- Die 0-te Vorfahrensgeneration von b enthält nur die Biene b selbst.
- Die $(n+1)$-te Vorfahrensgeneration von b besteht aus allen Eltern von Bienen der n-ten Vorfahrensgeneration von b. Die 1-te Vorfahrensgeneration sind also die Eltern, die 2-te die Großeltern, u.s.w.

Aufgabe 3.13

Beweisen Sie durch Induktion über n folgende Sätze:

i) Die n-te Vorfahrensgeneration einer Drohne besteht aus F_{n+1} Bienen.

ii) Die n-te Vorfahrensgeneration einer Königin besteht aus F_{n+2} Bienen.

F steht hierbei für die Fibonaccizahlen.

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Beweis durch vollständige Induktion über n:

1. **Induktionsverankerung** für $n = 0$ und $n = 1$:

   i) Die 0-te Vorfahrensgeneration einer Drohne besteht nur aus der Drohne selbst (1) $\leftrightarrow F_{0+1} = F_1 = 1$ ✓

   Die 1-te Vorfahrensgeneration einer Drohne besteht nur aus einer Königin (1) $\leftrightarrow F_{1+1} = F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$ ✓

   ii) Die 0-te Vorfahrensgeneration einer Königin besteht nur aus der Königin selbst (1) $\leftrightarrow F_{0+2} = F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$ ✓

   Die 1-te Vorfahrensgeneration einer Königin besteht aus einer Königin und einer Drohne (2)
   $\leftrightarrow F_{1+2} = F_3 = F_2 + F_1 = F_1 + F_0 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2$ ✓

2. **Induktionsschluss** von n auf $n+1$:

   i) <u>Zu zeigen:</u> Die $n+1$-te Vorfahrensgeneration einer Drohne besteht aus F_{n+2} Bienen.
   Die $n+1$-te Vorfahrensgeneration einer Drohne ist die n-te Vorfahrensgeneration ihrer Eltern, also einer Königin. Diese besteht nach Induktionsannahme aus F_{n+2} Bienen. ✓

   ii) <u>Zu zeigen:</u> Die $n+1$-te Vorfahrensgeneration einer Königin besteht aus F_{n+3} Bienen.
   Die $n+1$-te Vorfahrensgeneration einer Königin ist die n-te Vorfahrensgeneration ihrer Eltern, also einer Königin und einer Drohne. Diese besteht nach Induktionsannahme aus $F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$ Bienen. ✓

Aufgabe 3.14

Gegeben sei folgende Produktionsregel zur Bildung von Wörtern:

$$\vec{x} \in \mathit{Varname} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{x} = \beta\alpha & \text{für } \alpha \in \{a, b, c, \ldots, z\}, \beta \in \{A, B, C, \ldots, Z\} \\ \vec{x} = \alpha\beta & \\ \vec{x} = \alpha\vec{y}\beta & \text{für } \vec{y} \in \mathit{Varname} \end{cases}$$

Sei n die Länge eines gültigen Variablenwortes.
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion über n, dass n immer eine gerade Zahl ist.

1. **Induktionsverankerung** $A(2)$:

   Da die Anwendung der 3. Regel ein vorhandenes Element von *Varname* um zwei weitere Buchstaben ergänzt, wird die kleinst mögliche Länge von *Varname* nur durch Anwendung der 1. oder 2. Regel erreicht.
   In beiden Fällen besteht *Varname* aus genau einem Großbuchstaben und genau einem Kleinbuchstaben und somit aus genau zwei Buchstaben. 2 ist eine gerade Zahl. $\checkmark$

2. **Induktionsschluss** $A(n) \implies A(n+2)$:

   zu zeigen: $n+2$ ist eine gerade Zahl

   Für alle $n > 2$ kommt ausschließlich die dritte Regel zur Anwendung:
   $\vec{y} \in \mathit{Varname}$ wird durch Hinzufügen von von genau einem Großbuchstaben und genau einem Kleinbuchstaben also genau zwei Buchstaben erweitert.
   Da die Länge von $\vec{y}$ mit n Buchstaben nach Induktionsannahme immer gerade ist, muss auch die Länge von $\vec{x}$ mit $n+2$ Buchstaben immer gerade sein. $\checkmark$

Aufgabe 3.18

Gegeben sei die folgende falsche Aussage: [3]

Seien $g_1, \ldots, g_n$ verschiedene Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind ($n \geq 2$), dann haben alle diese Geraden einen Punkt gemeinsam.

Beweis durch vollständige Induktion:

1) Für $n = 2$ ist die Aussage wahr, denn je 2 nichtparallele Geraden schneiden sich.

[3] Diese Aufgabe stammt aus Kapitel 1.3 des Lehrbuchs von Matousek/Nesetril [?].

2) Angenommen, die Aussage gilt für n. Seien nun $n+1$ Geraden $g_1, \ldots, g_{n+1}$ mit den geforderten Eigenschaften gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung haben die ersten n dieser Geraden (also $g_1, g_2, \ldots g_n$) einen gemeinsamen Punkt: nennen wir ihn einmal x. Genauso haben auch die n Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, g_{n+1}$ einen Punkt gemeinsam: wir nennen ihn y. Die Gerade g_1 liegt in beiden Gruppen und enthält also sowohl x als auch y. Das trifft auch auf g_{n-1} zu. Nun schneiden sich aber g_1 und g_{n-1} in einem eindeutigen Punkt, also muss $x = y$ sein. Deshalb haben alle Geraden $g_1, \ldots, g_{n+1}$ einen gemeinsamen Punkt, nämlich x.

Frage:
Was ist falsch an diesem Beweis?

Aufgabe 3.18

Bei $n = 2$ muss dieser Beweis für $n + 1 = 3$ gelten. In diesem Fall sind aber die beiden Geraden g_1 und g_{n-1} identisch und schneiden sich damit in mehr als einem eindeutigen Punkt.
Damit ist die Behauptung für 3 Geraden nicht bewiesen. Obwohl der Indktionsschluss für höhere n funktioniert, kann die Behauptung auch nicht für mehr als 3 Geraden gefolgert werden, weil die Beweiskette unterbrochen ist. Sie gilt also nur für 2 Geraden, denn die Verankerung ist in Ordnung.

Aufgabe 3.20

Beweisen Sie die folgenden Aussagen direkt durch Äquivalenzumformungen.
Hierfür dürfen Sie alle aus der Schule bekannten Regeln für Ungleichungen verwenden.
Sei x eine beliebige reelle Zahl:

a) Für jede Zahl x gilt: $x < x + 1$
$x < x + 1 \underset{-x}{\Leftrightarrow} 0 < 1$ Die Richtung "$\Leftarrow$" dient als Beweis.

b) Für jede Zahl $x > 0$ gilt: $\frac{x}{2} < x$
$\frac{x}{2} < x \underset{-\frac{x}{2}}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{x}{2} \underset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 0 < x$ Die Richtung "$\Leftarrow$" dient als Beweis.

c) Für jede Zahl $x < 0$ gilt: $\frac{x}{2} > x$
$\frac{x}{2} > x \underset{-\frac{x}{2}}{\Leftrightarrow} 0 > \frac{x}{2} \underset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 0 > x$ Die Richtung "$\Leftarrow$" dient als Beweis.

Aufgabe 3.21

Beweisen Sie die folgenden Aussagen indirekt:

b) Es gibt keine größte reelle Zahl.

Gäbe es eine größte reelle Zahl, so sei diese y.
Es gilt dann:

$$\forall x \in \mathbb{R} : y \geq x \underset{x:=y+1}{\Longrightarrow} y \geq y+1 \underset{-y}{\Longrightarrow} 0 \geq 1 \lightning$$

c) Es gibt keine kleinste reelle Zahl, die größer als Null ist.

Gäbe es eine kleinste reelle Zahl, größer als Null, so sei diese y.
Es gilt dann:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : y \leq x \underset{x:=\frac{y}{2}}{\Longrightarrow} y \leq \frac{y}{2} \underset{-\frac{y}{2}}{\Longrightarrow} \frac{y}{2} \leq 0 \underset{\cdot 2}{\Longrightarrow} y \leq 0 \lightning$$

Beweisen Sie mit dem Schubfachprinzip, dass folgender Sachverhalt gilt:

Unter 70 Studierenden haben mindestens 2 dieselbe Körpergröße in cm.

Geben Sie an, welche Bedingungen Sie an die Körpergröße aller Studierenden stellen müssen, damit dieser Sachverhalt gilt.

Wenn beispielsweise alle Studierenden mindestens 145 cm und höchstens 210 cm groß sind, ist die Menge der möglichen Körpergrößen mit 66 Elementen kleiner als die Menge der Studierenden.
Somit kann eine Abbildung von der Menge der Studierenden auf die Menge der möglichen Körpergrößen nicht injektiv sein, so dass mindestens zwei Studierende dieselbe Körpergröße haben.

Aufgabe 3.23 a)

Es gibt bei der Fussball-WM 32 Mannschaften mit jeweils 11 Spielern pro Mannschaft. Die Mannschaften sind in 8 gleich große Gruppen eingeteilt.

1. Begründen Sie, warum nicht garantiert werden kann, dass mindestens 2 WM-Teilnehmer denselben Geburtstag (in möglicherweise verschiedenen Jahren) haben.

   Die Menge der WM-Teilnehmer ist mit $32 \cdot 11 = 352$ Elementen kleiner als die Menge der möglichen Geburtstage mit 366 Elementen. Somit ist eine injektive Funktion von der Menge der Spieler auf die Menge der Geburtstage grundsätzlich möglich, so dass jeder Spieler an einem anderen Tag Geburtstag haben könnte.

b) Üblicherweise haben die Mannschaften mehr als 11 Spieler nominiert. Wie viele Spieler müssen pro Mannschaft nominiert sein, damit garantiert ist, dass mindestens zwei WM-Teilnehmer am selben Tag Geburtstag haben?

Bereits bei 12 Spielern pro Mannschaft ist die Menge der WM-Teilnehmer ist mit $32 \cdot 12 = 384$ Elementen größer als die Menge der möglichen Geburtstage mit 366 Elementen und eine injektive Funktion nicht mehr möglich.

Aufgabe 3.23 c)

c) Begründen Sie, warum garantiert werden kann, dass auch ohne zusätzlich nominierte Spieler mindestens 2 Teilnehmer in derselben Gruppe im selben Monat Geburtstag haben.

Die 32 Mannschaften sind in 8 gleich große Gruppen mit jeweils $\frac{32}{8} = 4$ Mannschaften und somit $4 \cdot 11 = 44$ Spielern pro Gruppe eingeteilt.
Da die Menge der Spieler mit 44 Elementen größer ist als die Menge der Monate mit 12 Elementen, ist eine injektive Funktion von der Menge der Spieler auf die Menge der Monate nicht möglich.
Mindestens 2 (bzw. sogar mindestens 4) Teilnehmer haben im selben Monat Geburtstag.

Aufgabe 4.1

Finden Sie Belegungen für die Variablen $x, y \in \mathbb{Z}$, die folgende Prädikate erfüllen:

1. $(x \mid y) \wedge (y \mid (x - y))$

   Lösungsmenge: $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x = y\}$, also z. Bsp. $x = y = 1$

2. $((x - y) \mid y) \wedge (y \mid x)$

   Lösungsmenge: $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} : x = 2y\}$, also z. Bsp. $x = 2$ und $y = 1$

3. $(x - 1) \mid (\frac{x}{2})$

   $x = 0 \vee x = 2$

Aufgabe 4.2

a) Beweisen Sie, dass die Teilbarkeit eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist, d.h.:$\{(x, y) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) : x|y\}$ ist eine Ordnungsrelation. Beweisen Sie die benötigten Eigenschaften nicht nur in Worten, sondern durch die genaue Anwendung der Definition der Teilbarkeit auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ statt $\mathbb{Z}$. Schreiben Sie dafür die Definition erst einmal auf.

Eine (partielle) Ordnungsrelation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv (aber nicht linear).

Seien x, y zwei beliebige Zahlen aus $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann definieren wir:

$x|y :\iff \exists q \in \mathbb{N} : q \cdot x = y$

Aufgabe 4.2

Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : q \cdot x = x$ mit $q = 1$ ✓

Antisymmetrie:

zu zeigen für beliebige $\forall x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
$(\exists q_1, q_2 \in \mathbb{N} : q_1 \cdot x = y \ \wedge \ q_2 \cdot y = x) \implies x = y$

Sei also $q_1 \cdot x = y$ und $q_2 \cdot y = x \underset{y \text{ ersetzen}}{\implies} q_1 \cdot q_2 \cdot x = x$

$\underset{:x}{\implies} q_1 \cdot q_2 = 1 \underset{q_1, q_2 \in \mathbb{N}}{\implies} q_1 = q_2 = 1 \implies x = y$ ✓

Transitivität:

zu zeigen für beliebige $\forall x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
$(\exists q_1, q_2 \in \mathbb{N} : q_1 \cdot x = y \ \wedge \ q_2 \cdot y = z) \implies (\exists q_3 \in \mathbb{N} : q_3 \cdot x = z)$

$q_1 \cdot x = y \wedge q_2 \cdot y = z \underset{y \text{ ersetzen}}{\implies} q_2 \cdot (q_1 \cdot x) = z \underset{q_3 = q_1 \cdot q_2}{\implies} q_3 \cdot x = z$ ✓

(nicht linear: $\nexists q \in \mathbb{N} : q \cdot 3 = 7 \ \vee \ q \cdot 7 = 3$)

b) Warum ist die Teilbarkeit keine Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$?

Weil die Antisymmetrie bei $q = -1$ nicht gegeben ist.

Beispiel: $3|(-3) \quad \wedge \quad (-3)|3 \quad \wedge \quad 3 \neq (-3)$

Aufgabe 4.3

Beweisen Sie für ganze Zahlen:

b) $m|n_1 \wedge m|n_2 \Rightarrow m|(n_1 - n_2)$

$$
\begin{aligned}
&m|n_1 \iff \exists q_1 \in \mathbb{Z} : q_1 \cdot m = n_1 \\
&m|n_2 \iff \exists q_2 \in \mathbb{Z} : q_2 \cdot m = n_2 \\
&\implies (n_1 - n_2) = q_1 \cdot m - q_2 \cdot m = (q_1 - q_2) \cdot m \\
&q_1 \in \mathbb{Z} \ \wedge \ q_2 \in \mathbb{Z} \implies q_3 := (q_1 - q_2) \in \mathbb{Z} \\
&\implies (n_1 - n_2) = q_3 \cdot m \iff m|(n_1 - n_2) \ \checkmark
\end{aligned}
$$

c) $m|n_1 \Rightarrow m|(n_1 \cdot n_2)$

$$
\begin{aligned}
&m|n_1 \iff \exists q_1 \in \mathbb{Z} : q_1 \cdot m = n_1 \\
&\implies n_1 \cdot n_2 = q_1 \cdot m \cdot n_2 = (q_1 \cdot n_2) \cdot m \\
&q_1 \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n_2 \in \mathbb{Z} \implies q_2 := (q_1 \cdot n_2) \in \mathbb{Z} \\
&\implies n_1 \cdot n_2 = q_2 \cdot m \iff m|(n_1 \cdot n_2) \ \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4.8

Berechnen Sie jeweils (i) a DIV b sowie (ii) a MOD b:

a) $a = -17, b = 6$

b) $a = -17, b = -6$

c) $a = 17, b = -6$

d) $a = 17, b = 6$

$$
\begin{array}{lrclrcl}
\text{a)} & -17 \text{ DIV } 6 & = & -3 & -17 \text{ MOD } 6 & = & 1 \\
 & & & & \text{denn } -17 & = & -3 \cdot 6 + 1 \\
\text{b)} & -17 \text{ DIV } -6 & = & 3 & -17 \text{ MOD } -6 & = & 1 \\
 & & & & \text{denn } -17 & = & 3 \cdot (-6) + 1 \\
\text{c)} & 17 \text{ DIV } -6 & = & -2 & 17 \text{ MOD } -6 & = & 5 \\
 & & & & \text{denn } 17 & = & -2 \cdot (-6) + 5 \\
\text{d)} & 17 \text{ DIV } 6 & = & 2 & 17 \text{ MOD } 6 & = & 5 \\
 & & & & \text{denn } 17 & = & 2 \cdot 6 + 5
\end{array}
$$

Aufgabe 4.9

Beweisen Sie den folgenden Satz, aus dem die Gültigkeit des Euklidischen Algorithmus folgt: Für $n = q \cdot m + r$ gilt (wobei $n, q, m \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}$):
Sei $T(x, y)$ die Menge aller gemeinsamen Teiler von x und y.
Dann gilt: $T(m, n) = T(m, r)$
Hinweis: Zeigen Sie, dass jedes Element aus der einen Menge in der anderen liegt und umgekehrt.

Bemerkung: $n = q \cdot m + r \Leftrightarrow r = n - q \cdot m$

Sei $x \in T(m, n)$, d.h. es gilt:$x \mid m \wedge x \mid n$

$$x \mid m \wedge q \in \mathbb{Z} \underset{\text{Satz 4.2,3)}}{\Longrightarrow} x \mid q \cdot m$$

$$x \mid n \wedge x \mid q \cdot m \underset{\text{Satz 4.2,2)}}{\Longrightarrow} x \mid (n - q \cdot m) \underset{\text{Bemerkung oben}}{\Longrightarrow} x \mid r$$

Da alle gemeinsamen Teiler von m und n auch r teilen, ist $T(m, n)$ eine Teilmenge von $T(m, r)$.

Aufgabe 4.9

Sei $y \in T(m, r)$, d.h. es gilt: $y \mid m \wedge y \mid r$

$y \mid m \wedge q \in \mathbb{Z} \underset{\text{Satz 4.2,3)}}{\Longrightarrow} y \mid q \cdot m$

$y \mid q \cdot m \wedge y \mid r \underset{\text{Satz 4.2,1)}}{\Longrightarrow} y \mid (q \cdot m + r) \implies y \mid n$

Da alle gemeinsamen Teiler von m und r auch n teilen, ist $T(m, r)$ eine Teilmenge von $T(m, n)$.

$T(m, n) \subseteq T(m, r) \wedge T(m, r) \subseteq T(m, n)$
$\implies T(m, n) = T(m, r)$ ✓

Aufgabe 4.10

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von n und m mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, wobei:
$n = -190.476$ und $m = 29.172$
Geben Sie auch das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m an.

Es reicht aus, mit den Beträgen zu arbeiten. Das Vorzeichen kann weggelassen werden.

$190.476 = 6 \cdot 29.172 + 15.444$

$29.172 = 1 \cdot 15.444 + 13.728$

$15.444 = 1 \cdot 13.728 + 1.716$

$13.728 = 8 \cdot 1.716 + 0$

$ggT(-190.476, 29.172) = 1.716$

$kgV(-190.476, 29.172) = \frac{190.476 \cdot 29.172}{1.716} = 3.238.092$

Aufgabe 4.11a)

Testen Sie durch Probedivision, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind:

$$299, 997, 1301, 2183$$

Testen Sie keine überflüssigen Teilerkandidaten. Sie dürfen für die Probedivisionen einen Taschenrechner einsetzen.

- $299 = 13 \cdot 23 \implies$ keine Primzahl
- $\nexists q \in \mathbb{N} : 1 < q \leq 31 \ \wedge \ q|997 \implies$ Primzahl $(32^2 > 997)$
- $\nexists q \in \mathbb{N} : 1 < q \leq 36 \ \wedge \ q|1301 \implies$ Primzahl $(37^2 > 1301)$
- $2183 = 37 \cdot 59 \implies$ keine Primzahl

Aufgabe 4.11b)

Testen Sie durch Probedivision, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind:

$$511, 1009, 1511, 2009$$

Testen Sie keine überflüssigen Teilerkandidaten. Sie dürfen für die Probedivisionen einen Taschenrechner einsetzen.

- $511 = 7 \cdot 73 \implies$ keine Primzahl
- $\nexists q \in \mathbb{N} : 1 < q \leq 31 \ \wedge \ q | 1009 \implies$ Primzahl $(32^2 > 1009)$
- $\nexists q \in \mathbb{N} : 1 < q \leq 38 \ \wedge \ q | 1511 \implies$ Primzahl $(39^2 > 1511)$
- $2009 = 7 \cdot 287 \implies$ keine Primzahl

287 ist kein Primfaktor, aber das ist hierfür irrelevant.

Aufgabe 4.12

Betrachten Sie die Menge aller Primzahlen bis jeweils 60, 100, 150 und 200 und vergleichen Sie ihre Anzahl mit der logarithmischen Abschätzung aus Satz 4.22.
Hinweis: Besorgen Sie sich die Primzahlen mit dem Sieb des Eratosthenes, aus der Literatur oder dem Internet (z.B. über die Suchmaschine Wolfram Alpha: Fragen Sie nach *primes*).

Menge aller Primzahlen bis 200 $=$

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199\}$

- $\pi(60) = 17 \quad \frac{60}{\ln 60} \approx 14,65$
- $\pi(100) = 25 \quad \frac{100}{\ln 100} \approx 21,71$
- $\pi(200) = 35 \quad \frac{200}{\ln 200} \approx 29,94$
- $\pi(200) = 46 \quad \frac{200}{\ln 200} \approx 37,75$

Aufgabe 4.13

Im Beweis, dass es nicht nur endlich viele Primzahlen gibt, wird gezeigt, dass das Produkt aller (fälschlich angenommenen) endlich vielen Primzahlen $+1$ wieder eine Primzahl sein muss. Lösen Sie folgende Aufgabe:
Seien $p_1 \ldots p_n$ die ersten n Primzahlen $(2, 3, 5, \ldots)$. Finden Sie durch Ausprobieren ein n bzw. ein p_n, so dass

$$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) + 1$$

(also das Produkt der ersten n Primzahlen $+1$) keine Primzahl ist.

Überlegen Sie sich, warum das kein Widerspruch zum oben zitierten Beweis ist.

Für $n = 6$ gilt:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031$$

$30.031 = 59 \cdot 509 \implies$ keine Primzahl

Die Primfaktoren 59 und 509 liegen außerhalb der Menge $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\} \implies$ kein Widerspruch zum Beweis.

Karin und Bernd geraten in Streit über folgende Frage:
Liefert der Term $x^2 + x + 41$ für jedes $x \in \mathbb{N}$ eine Primzahl?
Bernd testet den Term für alle $x \leq 10$ und bekommt als Ergebnis jeweils eine Primzahl. Er vermutet, man könne mit vollständiger Induktion zeigen, dass immer eine Primzahl herauskommt. Karin unterstellt Bernd Rechenfehler oder Zufall und glaubt überhaupt nicht, dass immer eine Primzahl herauskommt. Wer hat Recht?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Karin hat recht.

Sei $x = 41$ dann ist
$x^2 + x + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 1763 = 43 \cdot 41$

Somit ist 1763 keine Primzahl.

Aufgabe 4.15 a)

1. Demonstrieren Sie an jeweils einem anderen Beispiel als auf Seite 144, dass die Definition von $\oplus$ und $\odot$ für $\mathbb{Z}_m$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten für die Restklasse ist.

$11 \in [\mathbf{4}]_7 \wedge -16 \in [\mathbf{5}]_7 \wedge 11 - 16 = -5 \in [\mathbf{4+5}]_7 = [9]_7 = [2]_7$

$7 \in [\mathbf{2}]_5 \wedge -2 \in [\mathbf{3}]_5 \wedge 7 \cdot (-2) = -14 \in [\mathbf{2} \cdot \mathbf{3}]_5 = [6]_5 = [1]_5$

b) Beweisen Sie diesen Sachverhalt über die Definition der Restklasse (siehe Satz 4.28).

Es seien $m, q, r \in \mathbb{Z}$, wobei $0 \leq r < |m|$ und
$i^* = q_{i^*} \cdot m + r_{i^*}$
$i = q_i \cdot m + r_i$
$k^* = q_{k^*} \cdot m + r_{k^*}$
$k = q_k \cdot m + r_k$

$i^* \in [i]_m \implies r_{i^*} = r_i$
$k^* \in [k]_m \implies r_{k^*} = r_k$

Zu zeigen: $i^* \in [i]_m \wedge k^* \in [k]_m \implies i^* + k^* \in [i+k]_m$

$i^* + k^* = q_{i^*} \cdot m + r_i + q_{k^*} \cdot m + r_k = (q_{i^*} + q_{k^*}) \cdot m + r_i + r_k$

$i + k = q_i \cdot m + r_i + q_k \cdot m + r_k = (q_i + q_k) \cdot m + r_i + r_k$

Damit haben $i^* + k^*$ und $i + k$ denselben Rest $r_i + r_k$ zu m und liegen somit in derselben Restklasse ✓

Aufgabe 4.15 b)

Zu zeigen: $i^* \in [i]_m \wedge k^* \in [k]_m \implies i^* \cdot k^* \in [i \cdot k]_m$

$$i^* \cdot k^* = (q_{i^*} \cdot m + r_i) \cdot (q_{k^*} \cdot m + r_k) =$$
$$q_{i^*} \cdot q_{k^*} \cdot m^2 + r_i \cdot q_{k^*} \cdot m + q_{i^*} \cdot r_k \cdot m + r_i \cdot r_k =$$
$$(q_{i^*} \cdot q_{k^*} \cdot m + r_i \cdot q_{k^*} + q_{i^*} \cdot r_k) \cdot m + r_i \cdot r_k$$

$$i \cdot k = (q_i \cdot m + r_i) \cdot (q_k \cdot m + r_k) =$$
$$q_i \cdot q_k \cdot m^2 + r_i \cdot q_k \cdot m + q_i \cdot r_k \cdot m + r_i \cdot r_k =$$
$$(q_i \cdot q_k \cdot m + r_i \cdot q_k + q_i \cdot r_k) \cdot m + r_i \cdot r_k$$

Damit haben $i^* \cdot k^*$ und $i \cdot k$ denselben Rest $r_i \cdot r_k$ zu m und liegen somit in derselben Restklasse $\checkmark$

Aufgabe 4.16

Zeigen Sie jeweils an einem Beispiel, dass $[a]_m \cdot [b]_n$ und $[a]_m + [b]_n$ für $n \neq m$ nicht wohldefiniert werden kann.

$7 \in [2]_5 \wedge 13 \in [6]_7 \wedge 7 \cdot 13 = 91 \in [1]_5 \wedge 91 \in [0]_7$

$2 \cdot 6 = 12 \in [2]_5 \wedge 12 \in [5]_7$

$1 \neq 0 \neq 2 \neq 5$

$7 \in [2]_5 \wedge 13 \in [6]_7 \wedge 7 + 13 = 20 \in [0]_5 \wedge 20 \in [6]_7$

$2 + 6 = 8 \in [3]_5 \wedge 8 \in [1]_7$

$0 \neq 6 \neq 3 \neq 1$

Finden Sie von folgenden Elementen das additiv und multiplikativ Inverse (falls es existiert). Geben Sie das gesuchte Element in normierter Darstellung an (also als Repräsentanten zwischen 0 und $n-1$).

a) 10 in $\mathbb{Z}_{21}$ b) 9 in $\mathbb{Z}_{21}$ c) 8 in $\mathbb{Z}_{25}$ d) 21 in $\mathbb{Z}_{27}$

additiv Inverse:

a) $[10]_{21}^{-1} = [11]_{21}$

b) $[9]_{21}^{-1} = [12]_{21}$

c) $[8]_{25}^{-1} = [17]_{25}$

d) $[21]_{27}^{-1} = [6]_{27}$

multiplikativ Inverse:

a) $[10]_{21}^{-1} = [19]_{21}$

$10 \cdot 19 = 9 \cdot 21 + 1$

b) $[9]_{21}^{-1}$ nicht vorh.

ggT $(9{,}21) \neq 1$

c) $[8]_{25}^{-1} = [22]_{25}$

$8 \cdot 22 = 7 \cdot 25 + 1$

d) $[21]_{27}^{-1}$ nicht vorh.

ggT $(21{,}27) \neq 1$

Aufgabe 5.1

Betrachten Sie die Menge
$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + b \quad \text{für } m,b \in \mathbb{R}\}$.

1. Zeigen Sie, dass diese Menge mit der elementweisen Addition eine abelsche Gruppe bildet, indem Sie alle Axiome konkret für allgemeine Elemente dieser Menge aufschreiben und ihre Gültigkeit in Worten oder formal begründen.
2. Zeigen Sie, dass diese Menge mit der elementweisen Multiplikation keine abelsche Gruppe bildet, indem Sie konkret ein Axiom angeben, das verletzt ist. Weisen Sie das durch ein Gegenbeispiel nach.

Aufgabe 5.1 a)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + b \quad$ für $m, b \in \mathbb{R}$

Es sei

$g(x) = m_1 x + b_1$
$h(x) = m_2 x + b_2$
$i(x) = m_3 x + b_3$

1) Innere Verknüpfung: $\forall a, b \in G : a \circ b \in G$

$g(x) \oplus h(x) = m_1 x + b_1 + m_2 x + b_2 = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)$
$(m_1 + m_2) \in \mathbb{R} \wedge (b_1 + b_2) \in \mathbb{R} \implies$
$(m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2) = mx + b \quad$ mit $m, b \in \mathbb{R}$ ✓

2) Assoziativgesetz: $\forall a, b, c \in G : (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$\big(g(x) \oplus h(x)\big) \oplus i(x) = \big((m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2)\big) + (m_3 x + b_3) =$
$(m_1 + m_2 + m_3)x + (b_1 + b_2 + b_3) =$
$(m_1 x + b_1) + \big((m_2 + m_3)x + (b_2 + b_3)\big) =$
$g(x) \oplus \big(h(x) \oplus i(x)\big)$ ✓

3) Neutrales Element: $\exists e \in G\ \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a$

$e = 0x + 0 = 0$
$f(x) \oplus e = (mx + b) + 0 = mx + b = f(x) = 0 + (mx + b) = e \oplus f(x)$ ✓

4) Inverses Element $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G : a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$

$f(x) \oplus f(x)^{-1} = (mx + b) + (-mx - b) = 0 = e = (-mx - b) + (mx + b) = f(x)^{-1} \oplus f(x)$ ✓

5) Kommutativgesetz $\forall a, b \in G : a \circ b = b \circ a$

$g(x) \oplus h(x) = (m_1 + m_2)x + (b_1 + b_2) = (m_2 + m_1)x + (b_2 + b_1) = h(x) \oplus g(x)$ ✓

Da alle fünf Axiome gelten, bildet die Menge eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 5.1 b)

Das neutrale Element bezüglich der elementweisen Multiplikation ist die Einsfunktion: $e = 0x + 1 = 1$

Bei der Nullfunktion und allen Funktionen mit Nullstelle ($m \neq 0$) kann es kein inverses Element $f(x)^{-1}$ geben, so dass $f(x) \odot f(x)^{-1} = 1$ wäre.

Beispiel mit der Nullfunktion:

$j(x) = 0x + 0$

$j(x) \odot j(x)^{-1} = e$

$\implies 0x + 0 \odot j(x)^{-1} = 1$

$\implies 0 \odot j(x)^{-1} = 1$

$\implies 0 = 1$ ↯

Aufgabe 5.3

Geben Sie bei folgenden Strukturen an, ob es sich um Gruppen handelt:
Falls ja, geben Sie an, ob es sich auch um eine abelsche Gruppe handelt und geben Sie das neutrale Element und für ein allgemeines Element sein Inverses an.
Falls nein, geben Sie das Gruppen-Axiom an, das verletzt wird.

1. $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ (Definition: $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$)

   Abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist 1. Das Inverse zu jedem Element ist sein Kehrwert: $\forall x \in \mathbb{Q}^+ : x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$

2. $(\mathbb{Q}^-, \cdot)$ (Definition: $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$)

   Keine Gruppe, da keine Innere Verknüpfung: Das Produkt von zwei negative Zahlen ist stets positiv und somit $\notin \mathbb{Q}^-$.
   Das einzig mögliche neutrale Element (1) ist ebenfalls $\notin \mathbb{Q}^-$.
   Somit kann es auch kein inverses Element geben.

Aufgabe 5.5

Konstruieren Sie eine Struktur $(M, \circ)$ mit einer Menge M aus 4 Elementen und einer Verknüpfungsoperation $\circ$, sodass in der Verknüpfungstabelle zwar in jeder Zeile und Spalte genau ein Element aus M steht, aber die Struktur dennoch keine Gruppe ist.

Hinweis: Versuchen Sie, das Assoziativgesetz zu verletzen!

$\circ$	1	2	3	4
1	1	4	3	2
2	2	3	4	1
3	3	1	2	4
4	4	2	1	3

$$(2 \circ 3) \circ 4 = 4 \circ 4 = 3$$

$$2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 4 = 1$$

$$3 \neq 1$$

Aufgabe 5.6

Geben Sie die Verknüpfungstabellen von $\oplus$ und $\odot$ für folgende Restklassengruppen an:

$$\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_7 \text{ und } \mathbb{Z}_8$$

Geben Sie zusätzlich für jedes Element das inverse Element an (falls es eins gibt).

$\oplus_4$	0	1	2	3	x^{-1}
0	0	1	2	3	0
1	1	2	3	0	3
2	2	3	0	1	2
3	3	0	1	2	1

$\odot_4$	0	1	2	3	x^{-1}
0	0	0	0	0	–
1	0	1	2	3	1
2	0	2	0	2	–
3	0	3	2	1	3

Aufgabe 5.6

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_7, \oplus$:

$\oplus_7$	0	1	2	3	4	5	6	x^{-1}
0	0	1	2	3	4	5	6	0
1	1	2	3	4	5	6	0	6
2	2	3	4	5	6	0	1	5
3	3	4	5	6	0	1	2	4
4	4	5	6	0	1	2	3	3
5	5	6	0	1	2	3	4	2
6	6	0	1	2	3	4	5	1

Aufgabe 5.6

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_7, \odot$:

$\odot_7$	0	1	2	3	4	5	6	x^{-1}
0	0	0	0	0	0	0	0	–
1	0	1	2	3	4	5	6	1
2	0	2	4	6	1	3	5	4
3	0	3	6	2	5	1	4	5
4	0	4	1	5	2	6	3	2
5	0	5	3	1	6	4	2	3
6	0	6	5	4	3	2	1	6

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_8, \oplus$:

$\oplus_8$	0	1	2	3	4	5	6	7	x^{-1}
0	0	1	2	3	4	5	6	7	0
1	1	2	3	4	5	6	7	0	7
2	2	3	4	5	6	7	0	1	6
3	3	4	5	6	7	0	1	2	5
4	4	5	6	7	0	1	2	3	4
5	5	6	7	0	1	2	3	4	3
6	6	7	0	1	2	3	4	5	2
7	7	0	1	2	3	4	5	6	1

Aufgabe 5.6

Verknüpfungstabelle $\mathbb{Z}_8, \odot$:

$\odot_8$	0	1	2	3	4	5	6	7	x^{-1}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	–
1	0	1	2	3	4	5	6	7	1
2	0	2	4	6	0	2	4	6	–
3	0	3	6	1	4	7	2	5	3
4	0	4	0	4	0	4	0	4	–
5	0	5	2	7	4	1	6	3	5
6	0	6	4	2	0	6	4	2	–
7	0	7	6	5	4	3	2	1	7

Aufgabe 5.7

Geben Sie die Verknüpfungstabellen von $\odot$ für die folgenden primen Restklassengruppen an:

$$\mathbb{Z}_4^*,\ \mathbb{Z}_7^* \text{ und } \mathbb{Z}_{12}^*$$

$\mathbb{Z}_4^*, \odot_4$	1	3
1	1	3
3	3	1

$\mathbb{Z}_7^*, \odot_7$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_{12}^*, \odot_{12}$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

Aufgabe 5.8

a) Geben Sie die Tabelle der Gruppe $(\mathbb{Z}_9^*, \odot_9)$ an.

$\mathbb{Z}_9^*, \odot$	$[1]_9$	$[2]_9$	$[4]_9$	$[5]_9$	$[7]_9$	$[8]_9$
$[1]_9$	$[1]_9$	$[2]_9$	$[4]_9$	$[5]_9$	$[7]_9$	$[8]_9$
$[2]_9$	$[2]_9$	$[4]_9$	$[8]_9$	$[1]_9$	$[5]_9$	$[7]_9$
$[4]_9$	$[4]_9$	$[8]_9$	$[7]_9$	$[2]_9$	$[1]_9$	$[5]_9$
$[5]_9$	$[5]_9$	$[1]_9$	$[2]_9$	$[7]_9$	$[8]_9$	$[4]_9$
$[7]_9$	$[7]_9$	$[5]_9$	$[1]_9$	$[8]_9$	$[4]_9$	$[2]_9$
$[8]_9$	$[8]_9$	$[7]_9$	$[5]_9$	$[4]_9$	$[2]_9$	$[1]_9$

b) Warum darf die Primzahl 3 nicht in $(\mathbb{Z}_9^*, \odot_9)$ enthalten sein?

3 ist zu 9 nicht teilerfremd: $[3]_9 \circ [3]_9 = [0]_9$
$[0]_9 \notin \mathbb{Z}_9^* \implies$ innere Verknüpfung verletzt!

Geben Sie für die vierelementigen Gruppen $(\mathbb{Z}_8{}^*, \odot)$, $(\mathbb{Z}_{10}{}^*, \odot)$, $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ und $(\mathbb{Z}_2^2, \oplus)$ an, welche Gruppen isomorph sind. Tipp: Es sind jeweils zwei isomorph. Geben Sie die Isomorphismen an und begründen Sie, warum nicht alle vier Gruppen isomorph sein können.

$\mathbb{Z}_8{}^*, \odot$	1	3	5	7
$\mathbb{Z}_2^2, \oplus_2$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
ord	1	2	2	2

$\mathbb{Z}_{10}{}^*, \odot$	1	3	9	7
$\mathbb{Z}_4, \oplus_4$	0	1	2	3
ord	1	4	2	4

Es können nicht alle vier Gruppen isomorph sein, da jedes Element auf ein Element gleicher Ordnung abgebildet werden muss.

Aufgabe 5.10

Geben Sie für die folgenden Elemente bezüglich der komponentenweisen Addition ihre inversen Elemente an:

$(2,2,0,2) \in \mathbb{Z}_5^4$

$(2,2,0,2)^{-1} = (3,3,0,3)$
denn $(2,2,0,2) \oplus (3,3,0,3) \equiv_5 (0,0,0,0)$

$(2,2,3,0,2) \in \mathbb{Z}_6^5$

$(2,2,3,0,2)^{-1} = (4,4,3,0,4)$
denn $(2,2,3,0,2) \oplus (4,4,3,0,4) \equiv_6 (0,0,0,0,0)$

Geben Sie ferner die Ordnung der Elemente an und weisen Sie das durch Zwischenergebnisse nach:

$(2, 2, 0, 2) \in \mathbb{Z}_5^4$

$ord(2, 2, 0, 2) = 5$

denn:

$$(2, 2, 0, 2) \oplus (2, 2, 0, 2) \equiv_5 (4, 4, 0, 4) \qquad (2)$$
$$(4, 4, 0, 4) \oplus (2, 2, 0, 2) \equiv_5 (1, 1, 0, 1) \qquad (3)$$
$$(1, 1, 0, 1) \oplus (2, 2, 0, 2) \equiv_5 (3, 3, 0, 3) \qquad (4)$$
$$(3, 3, 0, 3) \oplus (2, 2, 0, 2) \equiv_5 (0, 0, 0, 0) \qquad (5)$$

Geben Sie ferner die Ordnung der Elemente an und weisen Sie das durch Zwischenergebnisse nach:

$(2, 2, 3, 0, 2) \in \mathbb{Z}_6^5$

$ord(2, 2, 3, 0, 2) = 6$

denn:

$$(2, 2, 3, 0, 2) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (4, 4, 0, 0, 4) \qquad (2)$$
$$(4, 4, 0, 0, 4) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (0, 0, 3, 0, 0) \qquad (3)$$
$$(0, 0, 3, 0, 0) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (2, 2, 0, 0, 2) \qquad (4)$$
$$(2, 2, 0, 0, 2) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (4, 4, 3, 0, 4) \qquad (5)$$
$$(4, 4, 3, 0, 4) \oplus (2, 2, 3, 0, 2) \equiv_6 (0, 0, 0, 0, 0) \qquad (6)$$

Aufgabe 5.11

Geben Sie für jedes Element von $\mathbb{Z}_3^2$ die Ordnung bezüglich der komponentenweisen Addition an (ohne Nachweis).

$\mathbb{Z}_3^2, \oplus_3$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
ord	1	3	3	3	3	3

$\mathbb{Z}_3^2, \oplus_3$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
ord	3	3	3

Aufgabe 5.12

Finden Sie eine minimale Menge von Elementen aus $\mathbb{Z}_2^3$, welche die gesamte Gruppe bezüglich der komponentenweisen Addition erzeugt, und weisen Sie das nach.

$\mathbb{Z}_2^3 =$
$\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$

$\{\mathbf{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)}\} \subset \mathbb{Z}_2^3$

$(0,0,1) \oplus_2 (0,0,1) = (0,0,0)$
$(0,0,1) \oplus_2 (0,1,0) = (0,1,1)$
$(0,0,1) \oplus_2 (1,0,0) = (1,0,1)$
$(0,1,0) \oplus_2 (1,0,0) = (1,1,0)$
$(0,0,1) \oplus_2 (0,1,0) \oplus_2 (1,0,0) = (1,1,1)$

Außer $(0,0,0)$ haben alle Elemente die Ordnung 2. Mit weniger als drei Elementen lässt sich $\mathbb{Z}_2^3$ nicht erzeugen.

Aufgabe 5.16

Gegeben sei die Gruppe $(\mathbb{Z}_4, \oplus_4)$.
Nehmen Sie die 0 aus dieser Gruppe heraus und konstruieren Sie aus den restlichen drei Elementen eine Multiplikationsgruppe $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \odot_4)$, wobei 1 das neutrale Element sein soll.
Zeigen Sie an einem Beispiel, dass diese beiden Gruppen das Distributivgesetz verletzen und die Struktur $(\mathbb{Z}_4, \oplus_4, \odot_4)$ offensichtlich kein Körper ist.

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Für alle a, b, c muss gelten: $(a \oplus_4 b) \odot_4 c = (a \odot_4 c) \oplus_4 (b \odot_4 c)$

Setze $a = 1, b = 2, c = 3$: $(1 \oplus_4 2) \odot_4 3 \; = \; 3 \odot_4 3 \; = \; 2$

$(1 \odot_4 3) \oplus_4 (2 \odot_4 3) \; = \; 3 \oplus_4 1 \; = \; 0$ ↯

Konstruieren Sie den Körper GF(4) systematisch nach dem Verfahren auf Folie DM5-20 mit einem zulässigen Polynom und vergleichen Sie die Tabellen mit denen von der vorigen Aufgabe. Worin liegt der entscheidende Unterschied?

$4 = 2^2 \implies$ Primkörper ist $GF(2)$ $\quad p = 2 \quad r = 2$

Elemente: $\{0\ ,\ 1\ ,\ x\ ,\ x+1\}$

Zuweisung: 0 1 2 3

$\oplus_2$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,1)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Aufgabe 5.17

irreduzibles Polynom: $g(x) = x^2 + x + 1$

$g(0) \equiv_2 0 + 0 + 1 \equiv_2 1$
$g(1) \equiv_2 1 + 1 + 1 \equiv_2 1$

$g(x)$ hat keine Nullstellen und $deg(g(x)) \leq 3 \implies$ irreduzibel

$\odot_2^g$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$		
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$		

$$(1,0) \odot_2 (1,0) = x \odot_2 x \equiv_2 x^2$$

$$\begin{array}{ll} x^2 & \equiv_2 (x^2+x+1)\cdot 1 + \underline{(x+1)} \\ \underline{-x^2-x-1} & \\ \qquad x+1 & \end{array}$$

$\odot_2^g$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$		

Aufgabe 5.17 2. Polynomdivision

$$(1,0) \odot_2 (1,1) = x \odot_2 (x+1) \equiv_2 x^2 + x$$

$$\begin{array}{ll} x^2 + x & \equiv_2 (x^2+x+1)\cdot 1 + \underline{1} \\ \underline{-x^2 - x - 1} & \\ 1 & \end{array}$$

$\odot_2^g$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$	

$$(1,1) \odot_2 (1,1) = (x+1) \odot_2 (x+1) \equiv_2 x^2 + 1$$

$$\begin{array}{l} x^2 \quad + \quad 1 \;\equiv_2 (x^2+x+1)\cdot 1 + \underline{x} \\ \underline{-x^2 - x - 1} \\ \qquad\quad x \end{array}$$

$\odot_2^g$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,1)$	$(1,0)$

$\odot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

...vergleichen Sie die Tabellen mit denen von der vorigen Aufgabe. Worin liegt der entscheidende Unterschied?

a)

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\odot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

b)

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\odot_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Die Multiplikationsgruppen$\setminus\{0\}$ sind beide isomorph zu $\mathbb{Z}_3, +$. Änderungen ergeben sich in der Additionstabelle, wodurch nun das Distributivgesetz erfüllt wird.

1. Betrachten Sie den missglückten Versuch der Multiplikationstabelle für einen Körper mit 8 Elementen aus Beispiel 5.14, und weisen Sie mit einem anderen Beispiel als dem von Beispiel 5.15 nach, dass das Distributivgesetz verletzt ist.

$$((0,1,1) \oplus_2 (1,1,0)) \odot (0,1,0) = (1,0,1) \odot (0,1,0) = (1,1,0)$$

$$((0,1,1) \odot (0,1,0)) \oplus_2 ((1,1,0) \odot (0,1,0)) =$$
$$(1,0,0) \oplus_2 (1,1,1) = (0,1,1)$$

$$(1,1,0) \neq (0,1,1)$$

Aufgabe 5.18 b)

b) Weisen Sie mit Ihrem Beispiel aus a) nach, dass das Distributivgesetz für die korrigierte Multiplikationsgruppe in Beispiel 5.24 erfüllt ist.

$$\big((0,1,1) \oplus_2 (1,1,0)\big) \odot (0,1,0) = (1,0,1) \odot (0,1,0) = (0,0,1)$$

$$\big((0,1,1) \odot (0,1,0)\big) \oplus_2 \big((1,1,0) \odot (0,1,0)\big) =$$
$$(1,1,0) \oplus_2 (1,1,1) = (0,0,1)$$

$$(0,0,1) = (0,0,1) \checkmark$$

Schreiben Sie die Elemente der Gruppentafel für GF(8) aus Beispiel 5.24 auf S. 193/194 in den Zeilen und Spalten in einer solchen Reihenfolge auf, dass man auf den ersten Blick sieht, dass die Gruppentafel zyklisch ist.

Hinweis: Beachten Sie die analoge Konstruktion auf Seite 195 für GF(9).

$(0,1,0)$ hat die Ordnung 7 und ist somit ein erzeugendes Element.

$\odot_2^g$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$
$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$
$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$
$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$
$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$
$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$
$(1,0,1)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$
$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,0,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,0)$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$	$(0,0,1)$

Aufgabe 5.20

Arbeiten Sie in GF(9) mit folgender Benennung der Elemente:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0, & 1, & 2, & x, & x+1, & x+2, & 2x, & 2x+1, & 2x+2 \\ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \end{array} \right\}$$

Benutzen Sie folgende Rechentabellen und bei Bedarf das irreduzible Polynom: $x^2 + 1$:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	6	1	2	0	4	5	3
8	8	6	7	2	0	1	5	3	4

$\odot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	1	6	8	7	3	5	4
3	0	3	6	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	5	6	1	7	2	3
5	0	5	7	8	1	3	4	6	2
6	0	6	3	1	7	4	2	8	5
7	0	7	5	4	2	6	8	3	1
8	0	8	4	7	3	2	5	1	6

Prüfen Sie die Korrektheit der Tabellen an folgenden Beispielen nach:

a) $5 \oplus 4 \mathrel{\hat{=}} (x+2)+(x+1) \equiv_3 2x \mathrel{\hat{=}} 6$ ✓

b) $5 \odot 4 \mathrel{\hat{=}} (x+2)\cdot(x+1) \equiv_3 x^2+2$

$$\begin{array}{rl} x^2+2 & \equiv_3 (x^2+1)\cdot 1 + \underline{1} \mathrel{\hat{=}} 1 \checkmark \\ \underline{-x^2-1} & \\ 1 & \end{array}$$

c) $7 \oplus 7 \mathrel{\hat{=}} (2x+1)+(2x+1) \equiv_3 x+2 \mathrel{\hat{=}} 5$ ✓

d) $7 \odot 2 \mathrel{\hat{=}} (2x+1)\cdot 2 \equiv_3 x+2 \mathrel{\hat{=}} 5$ ✓

e) $8 \oplus 2 \mathrel{\hat{=}} (2x+2)+2 \equiv_3 2x+1 \mathrel{\hat{=}} 7$ ✓

f) $8 \odot 2 \mathrel{\hat{=}} (2x+2)\cdot 2 \equiv_3 x+1 \mathrel{\hat{=}} 4$ ✓

g) Überprüfen Sie das Distributivgesetz mit den Elementen 2, 3 und 4.

$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$:

$(2 \oplus 3) \odot 4 = 5 \odot 4 = 1$
$(2 \odot 4) \oplus (3 \odot 4) = 8 \oplus 5 = 1$ ✓

$c \odot (a \oplus b) = (c \odot a) \oplus (c \odot b)$:

$4 \odot (2 \oplus 3) = 4 \odot 5 = 1$
$(4 \odot 2) \oplus (4 \odot 3) = 8 \oplus 5 = 1$ ✓

Aufgabe 5.21

Untersuchen Sie, ob es zu den folgenden Zahlen einen Körper mit dieser Anzahl von Elementen gibt. Falls ja, geben Sie die Elemente in Vektor- oder Polynomschreibweise an. Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

1. 13 $GF(13) = \{(0),(1),(2),(3),(4),(5),(6),(7),(8),(9),(10),(11),(12)\}$
2. 16 $GF(16) = \{(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(0,1,1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,0),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,1,0,0),(1,1,0,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
3. 21 $= 3 \cdot 7$ und somit keine Potenz einer Primzahl p
4. 100 $= 2^2 \cdot 5^5$ und somit keine Potenz einer Primzahl p

Aufgabe 5.22

1. Geben Sie alle Elemente aus GF(16) in Polynomschreibweise an.
   $GF(16) =$
   $\{0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1, x^3, x^3+1,$
   $x^3+x, x^3+x+1, x^3+x^2, x^3+x^2+1, x^3+x^2+x, x^3+x^2+x+1\}$
2. Berechnen Sie $(x^2+x) \odot (x^3+1)$: Finden Sie dafür ein geeignetes irreduzibles Polynom, und weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach.

   Irreduzibles Polynom: $h(x) = x^4 + x + 1$

   $x^4 + x + 1$ lässt sich nicht in zwei kleinere Polynome mit $deg > 0$ zerlegen: Wegen x^4 und 1 kämen auf einer Seite nur die Faktoren $x+1$, x^2+1 und x^2+x+1 in Betracht. Es lässt sich jedoch (mittels Polynomdivision) kein passender zweiter Faktor finden.

Aufgabe 5.22 b)

$$(x^2 + x) \odot_2 (x^3 + 1) \equiv_2 x^5 + x^4 + x^2 + x$$

$$\begin{array}{l}
\;\; x^5 + x^4 \qquad\quad + x^2 + x \\
\underline{-x^5 \qquad\qquad\quad - x^2 - x} \\
\qquad\quad x^4 \\
\qquad\underline{-x^4 \qquad\qquad\quad - x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x + 1
\end{array}
\equiv_2 (x^4 + x + 1) \cdot (x + 1) + \underline{x + 1}$$

$$(x^2 + x) \odot_2^g (x^3 + 1) = x + 1$$

Aufgabe 5.24

a) Berechnen Sie das Polynom $(3x^4 + 4x^3 + 2x)$ modulo $(x^3 + x + 4)$ in $\mathbb{Z}_7[x]$.

b) Für welchen Körper ist diese Berechnung relevant?

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Sie diese Rechnung hier zur Erstellung einer Multiplikationstabelle verwenden können? Ist diese Bedingung hier erfüllt? (Begründung!)

Aufgabe 5.24 a) + b)

a) Berechnen Sie das Polynom $(3x^4 + 4x^3 + 2x)$ modulo $(x^3 + x + 4)$ in $\mathbb{Z}_7[x]$.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
3x^4 & +4x^3 & & + & 2x & \equiv_7 (x^3 + x + 4) \cdot (3x + 4) + \underline{(4x^2 + 5)} \\
\underline{-3x^4} & & \underline{-3x^2} & \underline{-} & \underline{12x} & \\
 & 4x^3 & +4x^2 & + & 4x & \\
 & \underline{-4x^3} & & \underline{-} & \underline{4x} & \underline{-16} \\
 & & 4x^2 & & & +5
\end{array}
$$

b) Für welchen Körper ist diese Berechnung relevant?

$7^3 = 343 \implies GF(343)$

c) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit Sie diese Rechnung hier zur Erstellung einer Multiplikationstabelle verwenden können? Ist diese Bedingung hier erfüllt? (Begründung!)

$g(x) = x^3 + x + 4$

$g(0) \equiv_7 0 + 0 + 4 \equiv_7 4$

$g(1) \equiv_7 1 + 1 + 4 \equiv_7 6$

$g(2) \equiv_7 1 + 2 + 4 \equiv_7 0$

Das Polynom $x^3 + x + 4$ hätte in $\mathbb{Z}_7[x]$ irreduzibel sein müssen. Das ist es aber nicht, da es bei $x = 2$ eine Nullstelle hat.

Aufgabe 5.25

Untersuchen Sie den Körper mit 343 Elementen und vergleichen Sie Ihre Resultate mit einem der zur Verfügung stehenden Programme über Endliche Körper (herunterzuladen von der Seite: `http://www.fh-wedel.de/mitarbeiter/iw/f-e/fertig/sw-projekte/galoisfeld/`)

$343 = 7^3 \qquad p = 7 \quad r = 3$

a) Geben Sie ein geeignetes irreduzibles Polynom an und weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach!
Hinweis: Arbeiten Sie mit möglichst kleinen Koeffizienten! Man findet schnell einen geeigneten Kandidaten.

$g(x) = x^3 + x + 1$

$g(0) \equiv_7 0 + 0 + 1 \equiv_7 1$

$g(1) \equiv_7 1 + 1 + 1 \equiv_7 3$

$g(2) \equiv_7 1 + 2 + 1 \equiv_7 4$

$g(3) \equiv_7 6 + 3 + 1 \equiv_7 3$

$g(4) \equiv_7 1 + 4 + 1 \equiv_7 6$

$g(5) \equiv_7 6 + 5 + 1 \equiv_7 5$

$g(6) \equiv_7 6 + 6 + 1 \equiv_7 6$

$g(x)$ hat keine Nullstellen und $deg(g(x)) \leq 3 \implies$ irreduzibel

b) Überprüfen Sie das Resultat von $200 \oplus 300$, indem Sie die Vektoraddition explizit durchführen!

$$200 = 4 \cdot 7^2 + 4$$
$$200 \mathrel{\hat{=}} 4x^2 + 4 \mathrel{\hat{=}} (4, 0, 4)$$

$$300 = 6 \cdot 7^2 + 6$$
$$300 \mathrel{\hat{=}} 6x^2 + 6 \mathrel{\hat{=}} (6, 0, 6)$$

$$200 \oplus 300 :$$

$$(4, 0, 4) \oplus (6, 0, 6) \equiv_7 (3, 0, 3)$$

$$3 \cdot 7^2 + 3 = 150$$

$$200 \oplus 300 = 150$$

c) Überprüfen Sie das Resultat von $200 \odot 300$, indem Sie die Polynommultiplikation und anschließende Reduktion explizit durchführen!

$200 \odot 300$:

$$(4x^2+4)\cdot(6x^2+6) = 24x^4+48x^2+24 \equiv_7 3x^4+6x^2+3$$

$$\begin{array}{l} 3x^4+6x^2 \qquad\quad +3 \equiv_7 (x^3+x+1)\cdot 3x + \underline{(3x^2+4x+3)} \\ \underline{-3x^4-3x^2-3x\qquad} \\ \qquad\quad 3x^2+4x+3 \end{array}$$

$$3\cdot 7^2+4\cdot 7+3 = 178$$

$$200 \odot 300 = 178$$

d) Überprüfen Sie wie eben das Resultat von $45 \odot 40$!

$45 = 6 \cdot 7 + 3$
$45 \mathrel{\hat{=}} 6x + 3 \mathrel{\hat{=}} (0, 6, 3)$

$40 = 5 \cdot 7 + 5$
$40 \mathrel{\hat{=}} 5x + 5 \mathrel{\hat{=}} (0, 5, 5)$

$45 \odot 40$:

$(6x + 3) \cdot (5x + 5) = 30x^2 + 45x + 15 \equiv_7 2x^2 + 3x + 1$

$2 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7 + 1 = 120$

$45 \odot 40 = 120$

Aufgabe 5.25 e)

e) Überprüfen Sie die Resultate von $200 \ominus 300$ und $200 \oslash 300$, indem Sie diese mit jeweils einer anderen Operation im selben Programm überprüfen! Geben Sie in Ihrer Lösung an, mit welchen Operationen Sie das überprüft haben!

$200 \ominus 300 = 250$

$250 \oplus 300 = 200$ ✓

$200 \oslash 300 = 3$

$3 \odot 300 = 200$ ✓

Aufgabe 6.1

Beweisen Sie den Satz, dass es n^k k-Tupel einer n-elementigen Menge gibt mit vollständiger Induktion über k: Sie dürfen benutzen, dass ein kartesisches Produkt zwischen zwei Mengen M und N insgesamt $|M| \cdot |N|$ Elemente enthält (Satz 6.1, Teil 2).

Induktionsverankerung $A(1)$ und $A(2)$:

Da es keine 0-Tupel einer n-elementigen Menge gibt aber $n^0 = 1$ wäre, gilt der Satz erst ab $k \geq 1$:

Sei $k = 1$, dann sind die 1-Tupel einer n-elementigen Menge M die Elemente der Menge selbst. Es gibt also $n = n^1$ 1-Tupel. ✓

Sie $k = 2$, dann ist die Menge aller 2-Tupel (Paare) einer n-elementigen Menge M das kartesische Produkt $M \times M$. Nach Satz 6.1, Teil 2 ist $|(M \times M)| = |M| \cdot |M| = n \cdot n = n^2$ ✓

Induktionsschluss $A(n) \implies A(n+1)$:

zu zeigen:
Es gibt n^{k+1} $(k+1)$-Tupel einer n-elementigen Menge M.

Die Menge aller $(k+1)$-Tupel einer n-elementigen Menge M ist die $(k+1)$-stellige Verknüpfung

$$\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{k+1 \text{ Faktoren}} = \{(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}) \mid a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} \in M\}$$

und gleichmächtig zu der Hintereinanderschaltung

$$(\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{k \text{ Faktoren}}) \times M = \{((a_1, \ldots, a_k), a_{k+1}) \mid a_1, \ldots, a_{k+1} \in M\}$$

deren Elemente sich nur durch die Klammerung unterscheiden.

Nach Induktionsannahme hat die Menge

$$\underbrace{M \times M \times ... \times M}_{k \text{ Faktoren}} = \{(a_1, ..., a_k) \mid a_1, ..., a_k \in M\} \; n^k \text{ Tupel.}$$

Somit hat nach Satz 6.1, Teil 2 die Menge

$$(\underbrace{M \times M \times ... \times M}_{k \text{ Faktoren}}) \times M = \{((a_1, ..., a_k), a_{k+1}) \mid a_1, ..., a_{k+1} \in M\}$$

$$n^k \cdot |M| = n^k \cdot n = n^{k+1} \text{ Tupel. } \checkmark$$

Aufgabe 6.2

Bestimmen Sie die Anzahl der durch 2, 3, 9 oder 11 teilbaren natürlichen Zahlen kleiner gleich 200 mit Hilfe der Siebformel.

Die Vielfachen von 9 sind auch Vielfache von 3. Damit bleibt die Anzahl dieselbe, wenn man nur die Teilbarkeit durch 2, 3 oder 11 betrachtet. Damit hat man die Vielfachen von 9 vollständig erfasst.

$M_2 = \{x \in \mathbb{N} | (\exists q \in \mathbb{N} : x = 2 \cdot q) \wedge x \leq 200\} = \{0, 2, 4, ..., 200\}$

$M_3 = \{x \in \mathbb{N} | (\exists q \in \mathbb{N} : x = 3 \cdot q) \wedge x \leq 200\} = \{0, 3, 6, ..., 198\}$

$M_{11} = \{x \in \mathbb{N} | (\exists q \in \mathbb{N} : x = 11 \cdot q) \wedge x \leq 200\} = \{0, 11, 22, ..., 198\}$

$$|M_2 \cup M_3 \cup M_9 \cup M_{11}| = |M_2 \cup M_3 \cup M_{11}| \underset{\textit{Siebformel}}{=}$$

$$|M_2| + |M_3| + |M_{11}| - |M_2 \cap M_3| - |M_2 \cap M_{11}| - |M_3 \cap M_{11}| + |M_2 \cap M_3 \cap M_{11}|$$

Berechnung der Anzahl der Elemente der Einzelmengen:

$$|M_2| = |\{0, 2, 4, ..., 200\}| = \frac{200}{2} + 1 = 101$$

$$|M_3| = |\{0, 3, 6, ..., 198\}| = \frac{198}{3} + 1 = 67$$

$$|M_{11}| = |\{0, 11, 22, ..., 198\}| = \frac{198}{11} + 1 = 19$$

$$|M_2 \cap M_3| = |M_6| = |\{0, 6, 12, ..., 198\}| = \frac{198}{6} + 1 = 34$$

$$|M_2 \cap M_{11}| = |M_{22}| = |\{0, 22, 44, ..., 198\}| = \frac{198}{22} + 1 = 10$$

$$|M_3 \cap M_{11}| = |M_{33}| = |\{0, 33, 66, ..., 198\}| = \frac{198}{33} + 1 = 7$$

$$|M_2 \cap M_3 \cap M_{11}| = |\{0, 66, 132, 198\}| = 4$$

Damit ergibt sich für die Gesamtmenge:

$$|M_2 \cup M_3 \cup M_9 \cup M_{11}| = 101 + 67 + 19 - 34 - 10 - 7 + 4 = \underline{140}$$

Aufgabe 6.3

Ist es besser, zwei 3-stellige Zahlenschlösser oder ein 6-stelliges zu benutzen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Es ist besser ein 6-stelliges Zahlenschloss zu benutzen.

Zwei 3-stellige Zahlenschlösser:
$2 \cdot 10^3 = 2.000$ mögliche Kombinationen

Ein 6-stelliges Zahlenschloss:
$1 \cdot 10^6 = 1.000.000$ mögliche Kombinationen

Aufgabe 6.4

Gegeben sei die Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$.
Bilden Sie alle 4-elementigen Teilmengen und vergleichen Sie ihre Anzahl mit dem entsprechenden Binomialkoeffizienten.

$$\begin{array}{ccccc} \{a,b,c,d\} & \{a,b,c,e\} & \{a,b,c,f\} & \{a,b,d,e\} & \{a,b,d,f\} \\ \{a,b,e,f\} & \{a,c,d,e\} & \{a,c,d,f\} & \{a,c,e,f\} & \{a,d,e,f\} \\ \{b,c,d,e\} & \{b,c,d,f\} & \{b,c,e,f\} & \{b,d,e,f\} & \{c,d,e,f\} \end{array}$$

$\Longrightarrow$ 15 Teilmengen.

$\binom{6}{4} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{6\cdot5}{1\cdot2} = \frac{30}{2} = 15$ ✓

Aufgabe 6.5

Aus dem ASCII-Alphabet (mit $n = 26$ Zeichen) sollen Wörter der Länge $k = 2; 3; 4$ so gebildet werden, dass die Wiederholung eines Zeichens je Wort ausgeschlossen ist. Wie viele Wörter können jeweils gebildet werden?

$k = 2$: Es können $26 \cdot 25 = 650$ Wörter gebildet werden.

$k = 3$: Es können $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$ Wörter gebildet werden.

$k = 4$: Es können $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358800$ Wörter gebildet werden.

Aufgabe 6.6

Welchen Koeffizienten hat der Term $a^4 b^2 c d^3$ in $(a+b+c+d)^{10}$?

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 \cdot 1 =$$

$$210 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 1 = 12600$$

Aufgabe 6.8

Gegeben sei die Permutation (2 5 4 3) (9 7) (1 6 8)

a) Schreiben Sie diese als Permutationstabelle und als Anordnung auf.

$$f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 4 & 8 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$f_0 = 6\ 5\ 2\ 3\ 4\ 8\ 9\ 1\ 7$

b) Geben Sie die Zerlegung in Transpositionen an.

(2 3) (2 4) (2 5) (9 7) (1 8) (1 6)

c) Ist die Permutation gerade oder ungerade?

gerade!

(gerade Anzahl von Transpositionen)

Aufgabe 6.9

Gegeben sei die Permutation
(20 2 5 4) (12 10 13) (19 3 9 7 15) (11 14 17) (1 16 6 8 18).

Ist die Permutation gerade oder ungerade?
(Hinweis: Lösungszeit < 1 *Minute).*

ungerade!

da ungerade Anzahl ungerader Zyklen: (20 2 5 4)

Achtung:
Ein Zyklus mit einer geraden Anzahl von Elementen lässt sich mit ungerade vielen Transpositionen darstellen, ist also ungerade. Daher ist ein Zyklus mit einer ungeraden Anzahl von Elementen gerade (trifft auf alle anderen Zyklen oben zu).

Betrachten Sie die Permutationsgruppe Π_3.

1. Geben Sie den Isomorphismus zwischen Π_3 und S_3 explizit an.

$S_3, \circ$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	σ_l	σ_r	σ_o
$\Pi_3, \circ$	(1)	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
ord	1	3	3	2	2	2

$f(\rho_1) = (123)$ und $f(\sigma_l) = (12)$ als erzeugende Elemente festgelegt.

$f(\rho_2) = (132)$ ergibt sich aus einem verbleibenden Element mit Ordnung 3.

$f(\sigma_r) = f(\rho_2 \circ \sigma_l) = f(\rho_2) \circ f(\sigma_l) = (132) \circ (12) = (23)$

$f(\sigma_o) = (13)$, da jeweils letztes verbleibendes Element.

2. Geben Sie für jedes Element aus Π_3 sein Inverses an.

$x \in \Pi_3$	(1)	(123)	(132)	(12)	(23)	(13)
x^{-1}	(1)	(132)	(123)	(12)	(23)	(13)

Aufgabe 6.10 c)

c) Zeigen Sie, dass die Menge aller ungeraden Permutationen keine Untergruppe von Π_3 ist.

Die Menge aller ungerader Permutationen $\{(12), (13), (23)\}$ ist keine Untergruppe, da bei der Komposition von zwei ungeraden Permutationen eine gerade Permutation entsteht und somit die innere Verknüpfung verletzt wird.

Beispiel: $(12) \circ (13) = (132)$

Aufgabe 6.12

Betrachten Sie die Gruppe S_4 aller Permutationen der Zahlen $1, 2, 3, 4$:

a) Geben Sie alle Elemente der Gruppe in Zyklendarstellung an und unterstreichen Sie in die geraden Permutationen aus der alternierenden Gruppe A_4.

$\underline{\sigma_1 = (1)}$	$\sigma_7 = (3\ 4)$	$\underline{\sigma_{13} = (1\ 4\ 3)}$	$\sigma_{19} = (1\ 3\ 4\ 2)$
$\sigma_2 = (1\ 2)$	$\underline{\sigma_8 = (1\ 2\ 3)}$	$\underline{\sigma_{14} = (2\ 3\ 4)}$	$\sigma_{20} = (1\ 4\ 2\ 3)$
$\sigma_3 = (1\ 3)$	$\underline{\sigma_9 = (1\ 2\ 4)}$	$\underline{\sigma_{15} = (2\ 4\ 3)}$	$\sigma_{21} = (1\ 4\ 3\ 2)$
$\sigma_4 = (1\ 4)$	$\underline{\sigma_{10} = (1\ 3\ 2)}$	$\sigma_{16} = (1\ 2\ 3\ 4)$	$\underline{\sigma_{22} = (1\ 2)\ (3\ 4)}$
$\sigma_5 = (2\ 3)$	$\underline{\sigma_{11} = (1\ 3\ 4)}$	$\sigma_{17} = (1\ 2\ 4\ 3)$	$\underline{\sigma_{23} = (1\ 3)\ (2\ 4)}$
$\sigma_6 = (2\ 4)$	$\underline{\sigma_{12} = (1\ 4\ 2)}$	$\sigma_{18} = (1\ 3\ 2\ 4)$	$\underline{\sigma_{24} = (1\ 4)\ (2\ 3)}$

Aufgabe 6.12

b) Geben Sie zu den Elementen (1 3 2 4) und (1 3)(2 4) die Inversen an.

$(1\ 3\ 2\ 4)^{-1} = (4\ 2\ 3\ 1) = (1\ 4\ 2\ 3)$
$(1\ 3)(2\ 4)^{-1} = (1\ 3)(2\ 4)$

c) Zeigen Sie an den Elementen von b), dass das Kommutativitätsgesetz nicht gilt.

$(1\ 3\ 2\ 4) \circ (1\ 3)(2\ 4) = (1\ 2)$
$(1\ 3)(2\ 4) \circ (1\ 3\ 2\ 4) = (3\ 4)$
Die Ergebnisse sind nicht gleich.

Betrachten Sie die Gruppe S_5.

1. Geben Sie an, wie viele Elemente diese Gruppe hat.
   $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$
2. Geben Sie ein Element maximaler Ordnung an.
   Weisen Sie die Ordnung explizit nach, und begründen Sie informell, warum es kein Element größerer Ordnung geben kann.

   $(123)(45)$, *Ordnung* $= 6$:

   $(123)(45) \circ (123)(45) = (132)$
   $(123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) = (45)$
   $(123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) = (123)$
   $(123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) = (132)(45)$
   $(123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) \circ (123)(45) = (1)$

Aufgabe 6.13 b)

Begründung:

Jeder n-elementige Zyklus verschwindet bei n-facher Hintereinanderschaltung, weil dann jedes Element wieder auf sich selbst abgebildet wird.

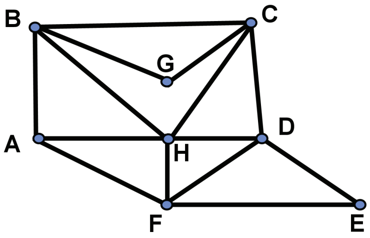
Die Ordnung einer Permutation ist also das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der jeweiligen Anzahl der Elemente aller disjunkter Zyklen.

Die Summe der Elemente aller disjunkter Zyklen einer Permutation der Menge M ist maximal $|M|$, bei S_5 also 5.

Die maximale Ordnung bei $|M| = 5$ ist $kgV(2, 3) = 2 \cdot 3 = 6$.

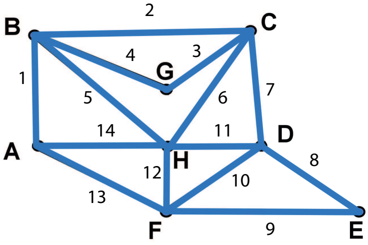
Aufgabe 7.2 a)

1. Finden Sie im folgenden Graphen einen Eulerkreis (oder Eulerweg) und einen Hamiltonkreis, falls das möglich ist. Begründen Sie gegebenenfalls, warum es nicht geht.

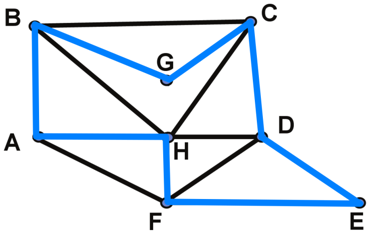


Aufgabe 7.2 a)

Eulerweg:

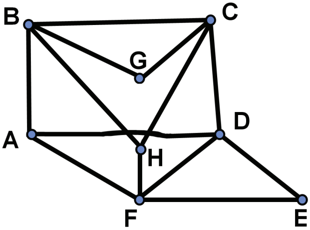


Hamiltonkreis:



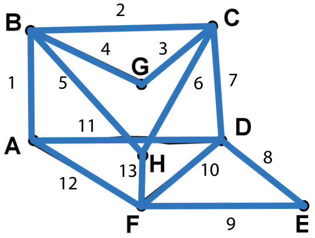
Nur Eulerweg zwischen A und H wegen ungerader Valenz möglich.
z.B.: A-B-C-G-B-H-C-D-E-F-D-H-F-A-H

b) Ergibt der folgende Graph andere Resultate?

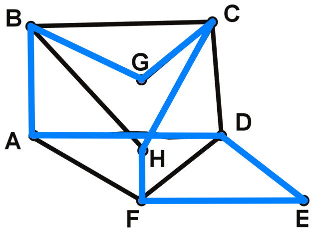


Aufgabe 7.2 b)

Eulerweg:

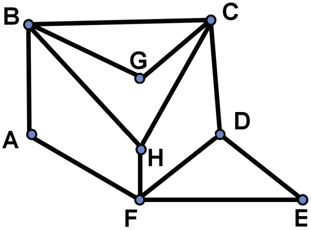


Hamiltonkreis:

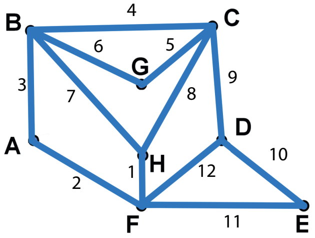


Nur Eulerweg zwischen A und H wegen ungerader Valenz möglich.
z.B.: A-B-C-G-B-H-C-D-E-F-D-A-F-H

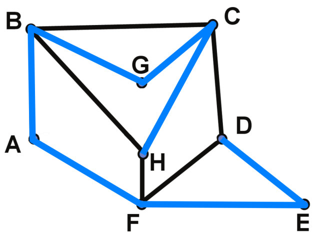
c) Ergibt der folgende Graph andere Resultate?



Eulerweg:



Hamiltonweg:

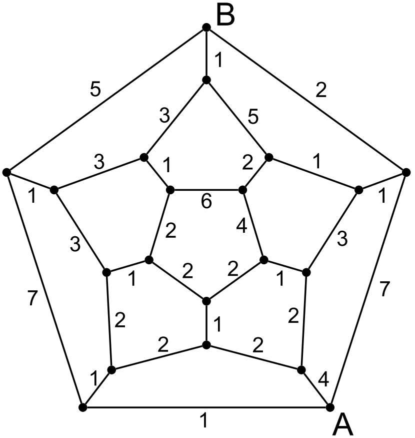


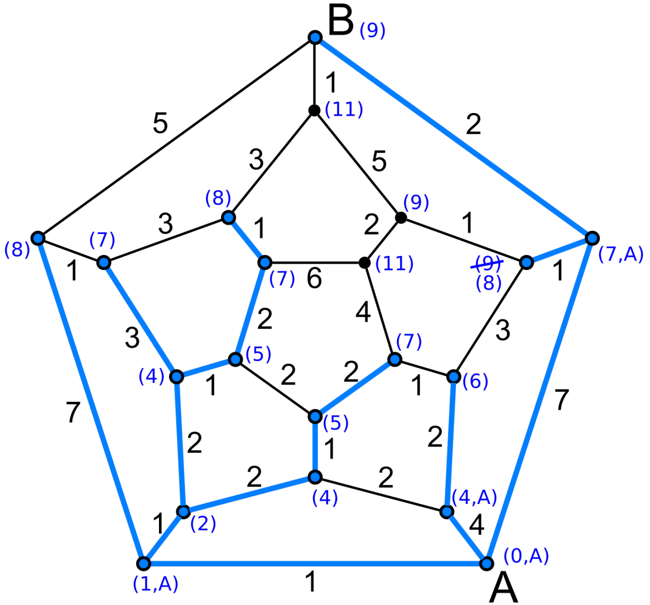
Nur Eulerweg zwischen H und D wegen ungerader Valenz möglich.
z.B.: H-F-A-B-C-G-B-H-C-D-E-F-D

Da E, A und G den Grad 2 haben sind für den Hamiltonweg die ineinandergreifenden Teilabschnitte D-E-F, F-A-B und B-G-C vorgegeben. Duch hinzufügen von C-H entsteht nur ein Hamiltonweg aber kein Hamiltonkreis.

Aufgabe 7.3 mit anderem Startknoten

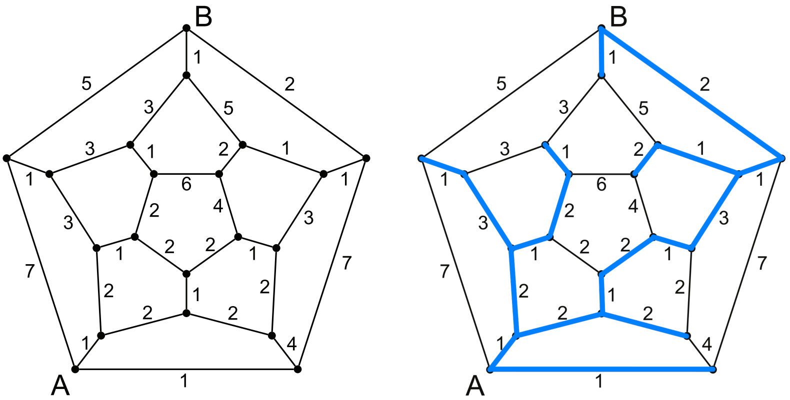
Berechnen Sie in dem gewichteten Dodekaedergraphen den kürzesten Weg von A nach B mit dem Algorithmus von Dijkstra. Sie müssen nicht alle Zwischenschritte angeben, aber zeichnen Sie die kürzesten Wege zu allen Punkten ein, die dieser Algorithmus berechnet hat.




B
(9)
1
(11)
5
2
3
5
(8)
(9)
3
1
2
1
(8)
(7)
(7)
6
(11)
~~(9)~~
(8)
1
(7,A)
1
4
2
3
3
(5)
(7)
(4)
2
2
1
(6)
1
7
(5)
7
2
1
2
2
2
(4)
(4,A)
1
(2)
4
(0,A)
(1,A)
1
A

Aufgabe 7.4

Bestimmen Sie in dem bewerteten Dodekaedergraphen einen minimalen spannenden Baum nach dem Algorithmus von Kruskal.



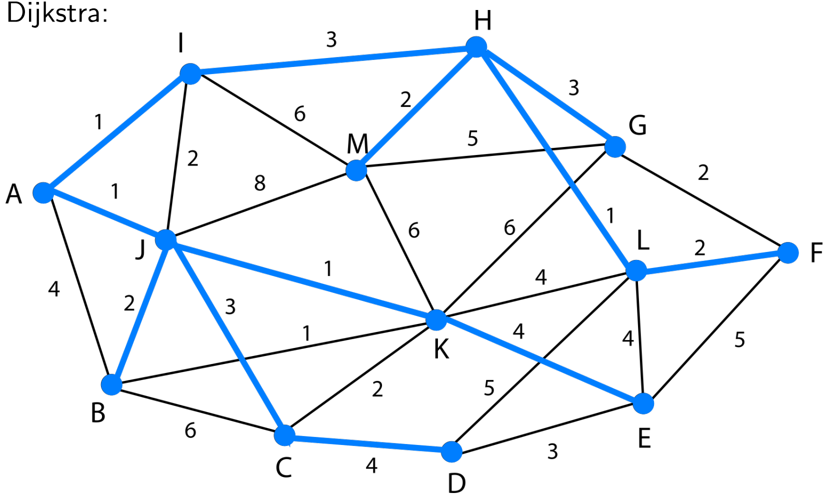
Aufgabe 7.5

Bilden Sie im Übungsgraphen von Abbildung 7.43 Gerüste, die folgende Größen minimieren:

a) Gesamtlänge der Wege von A zu allen anderen Ecken (Dijkstra)
b) Gesamtlänge aller Kanten (Kruskal)

Berechnen Sie die Gesamtlänge der Wege von A sowie aller Kanten für beide Gerüste.

Dijkstra:

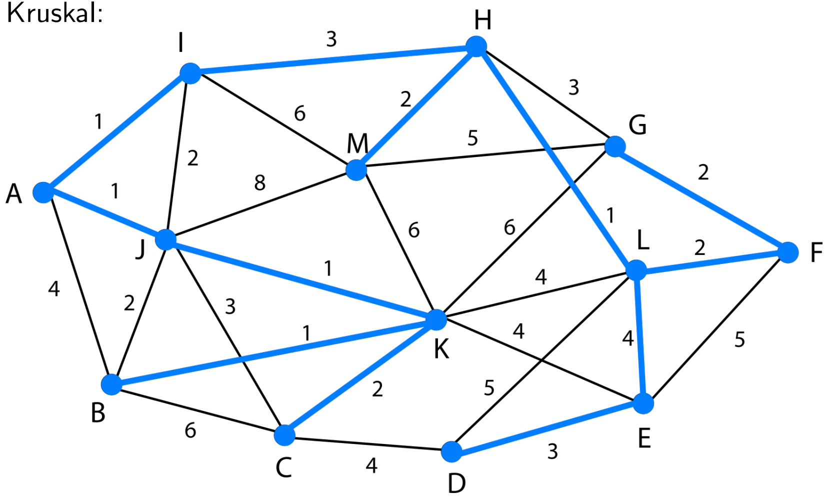


Gesamtlänge der Wege von A: 54

Gesamtlänge aller Kanten: 27

Aufgabe 7.5 b)

Kruskal:

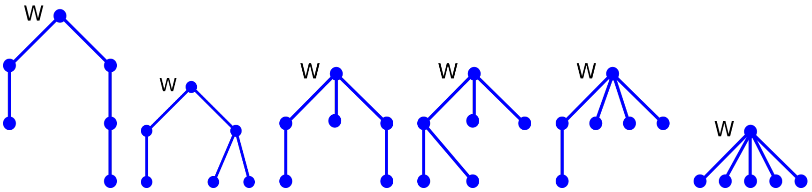


Gesamtlänge der Wege von A: 63

Gesamtlänge aller Kanten: 23

Aufgabe 7.6

Zeichnen Sie alle Bäume mit 6 Ecken und wählen Sie für jeden Baum eine Wurzel so aus, dass seine maximale Suchtiefe minimal ist. Geben Sie diese Suchtiefe an.



Suchtiefe:

3	2	2	2	2	1

Aufgabe 7.7 mit 18 statt 25 Knoten

Zeichnen Sie:

a) einen binären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.

b) einen ternären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.

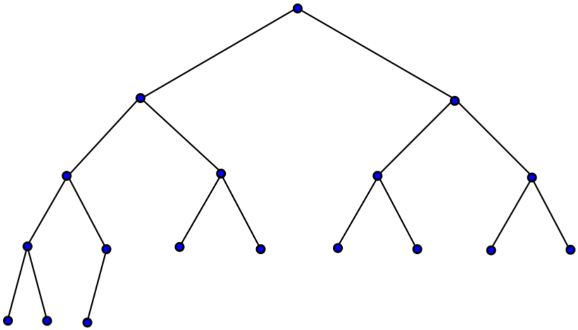
c) einen 5-ären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.

d) Lösen Sie die Aufgaben a) bis c) mit 18 Blättern statt Knoten.

Aufgabe 7.7 a) mit 18 statt 25 Knoten

Zeichnen Sie:

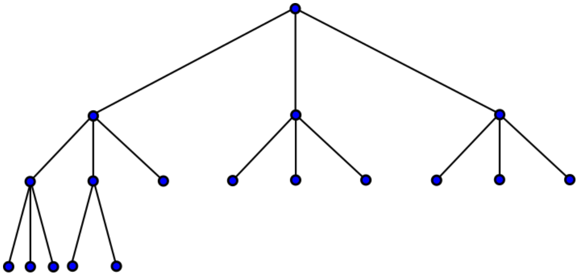
a) einen binären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.



Aufgabe 7.7 b) mit 18 statt 25 Knoten

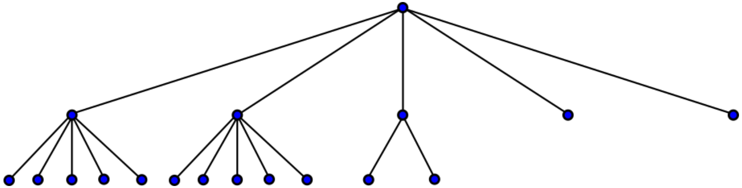
Zeichnen Sie:

b) einen ternären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.



Zeichnen Sie:

c) einen 5-ären Suchbaum mit genau 18 Knoten und minimaler Suchtiefe.

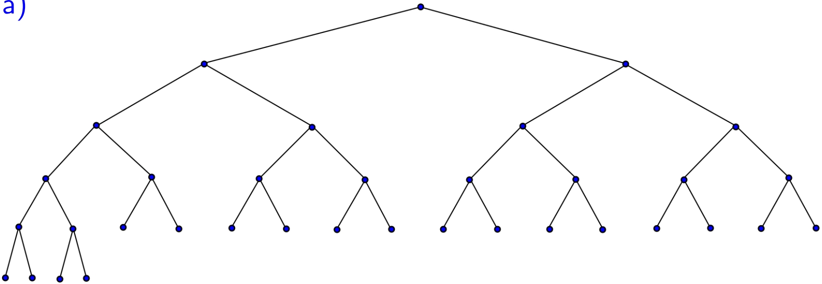


Zusatz zu Aufgabe 7.7 mit 18 statt 25 Knoten

Zeichnen Sie:

d) Lösen Sie die Aufgaben a) bis c) mit 18 Blättern statt Knoten.

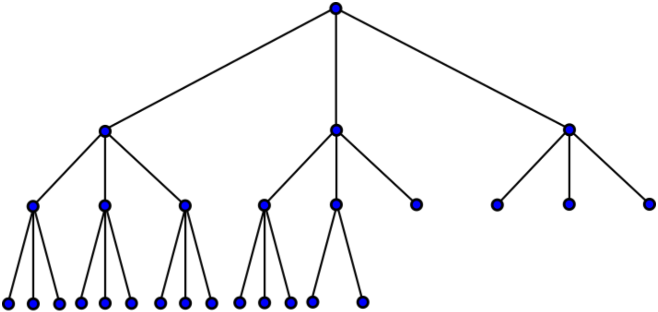
a)



Zeichnen Sie:

d) Lösen Sie die Aufgaben a) bis c) mit 18 Blättern statt Knoten.

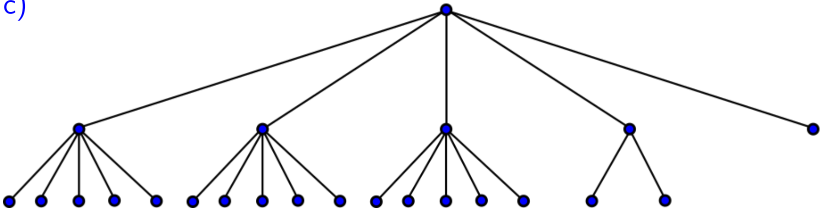
b)



Zeichnen Sie:

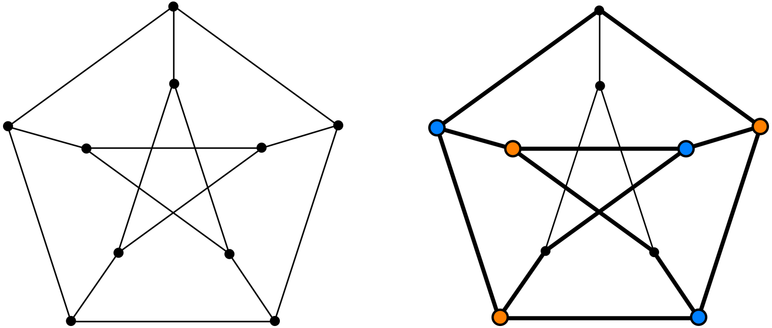
d) Lösen Sie die Aufgaben a) bis c) mit 18 Blättern statt Knoten.

c)



Aufgabe 7.8

Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Kuratowski, dass der Petersengraph nicht planar ist.



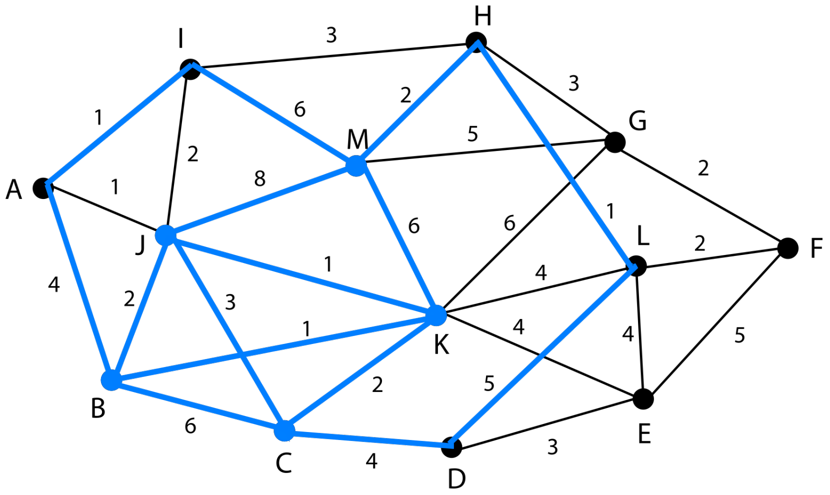
Der Petersengraph enthält als Untergraph eine Unterteilung von $K_{3,3}$.

Aufgabe 7.10 a)

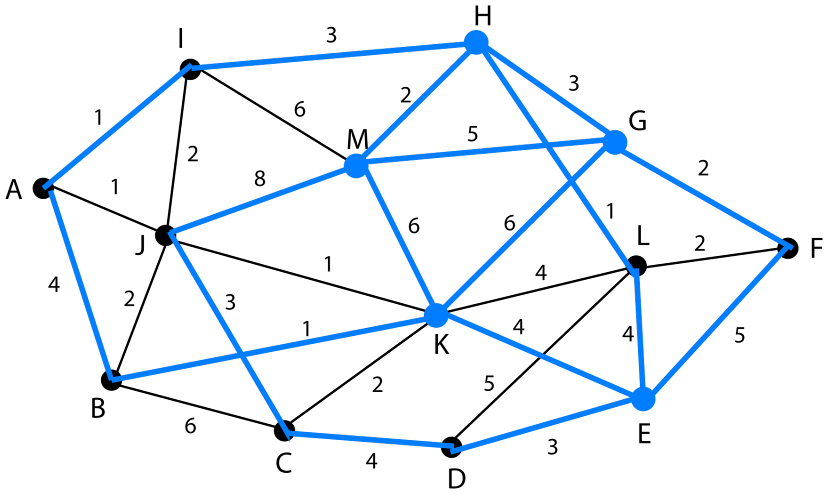
Ist der Übungsgraph von Abbildung 7.43 planar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Der Graph ist nicht planar, weil er Unterteilungen von K_5 und $K_{3,3}$ enthält.

Unterteilung von K_5: J-M-K-C-B

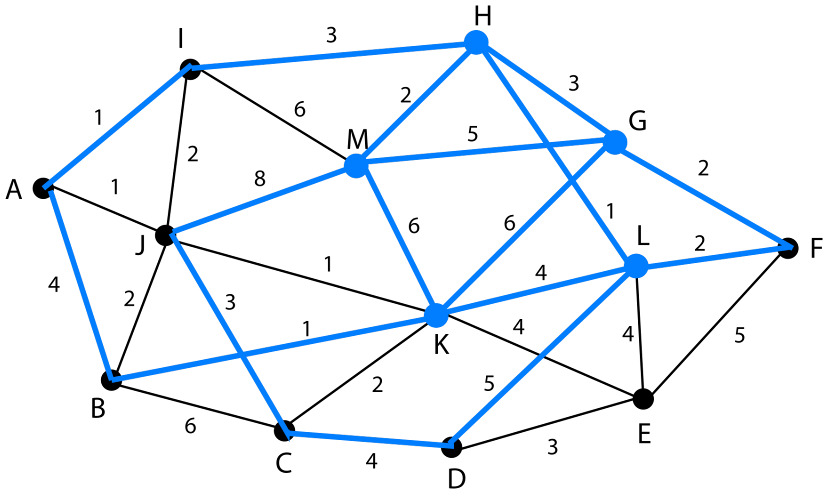


Unterteilung von K_5: M-H-G-E-K



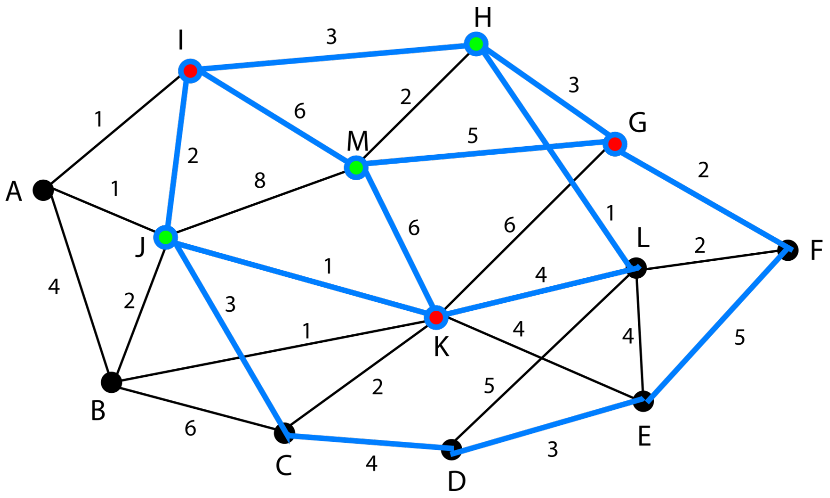
Aufgabe 7.10 a)

Unterteilung von K_5: M-H-G-L-K



Aufgabe 7.10 a)

Unterteilung von $K_{3,3}$: J,M,H und I,K,G



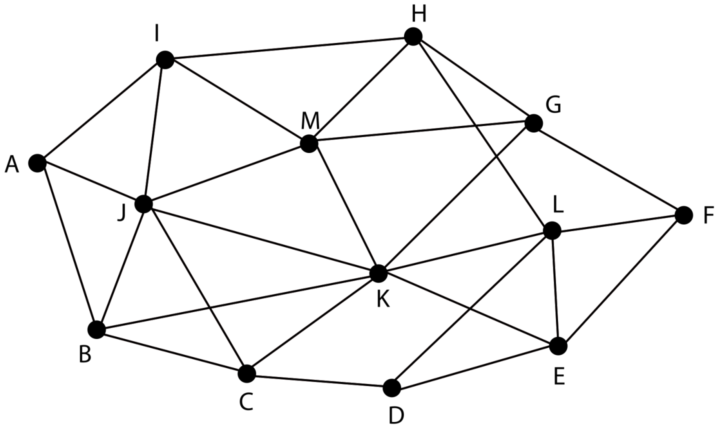
Aufgabe 7.10 b)

Falls die Antwort in der vorherigen Aufgabe "ja" war, fügen Sie Kante(n) hinzu, sodass der Graph nicht mehr planar ist. Falls die Antwort "nein" war, entfernen Sie Kanten, sodass der Graph planar ist. Begründen Sie wiederum Ihre Antwort!

Da der ursprüngliche Graph nicht planar ist, müssen also Kanten entfernt werden, bis er planar ist.

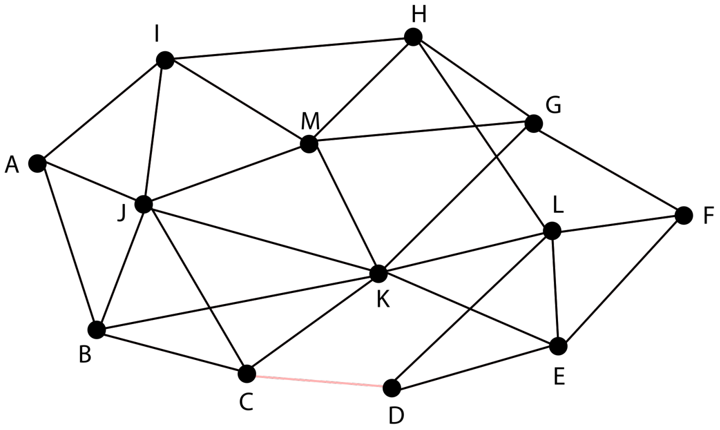
Lösung mit der Entfernung von nur einer Kante

ursprünglicher Graph:



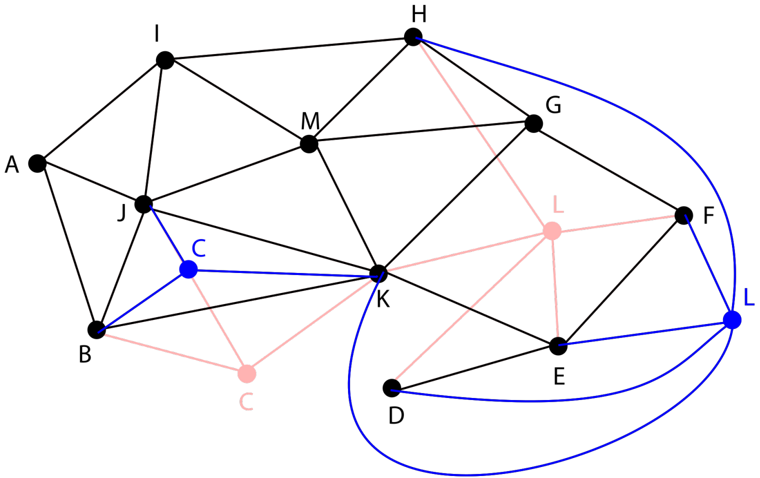
Aufgabe 7.10 b)

Entfernung der Kante C-D:



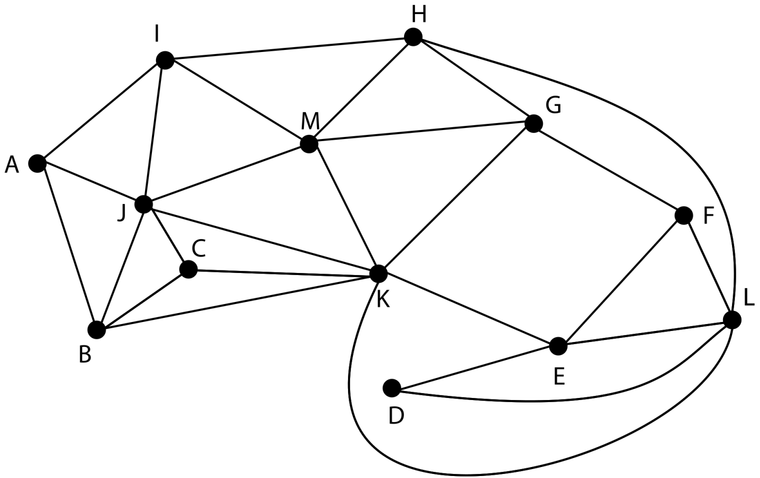
Aufgabe 7.10 b)

Überkreuzungsfreie Zeichnung:



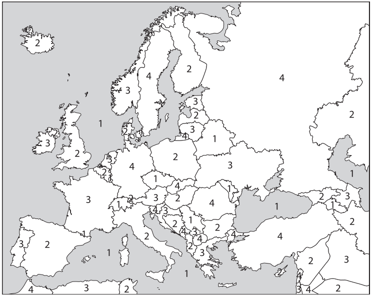
Aufgabe 7.10 b)

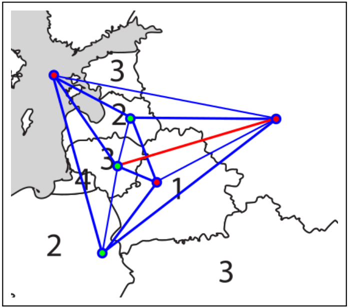
Der Graph ist planar.



Aufgabe 7.11

Zeigen Sie anhand der Europakarte, dass der duale Graph, der entsteht, wenn man die Königsberger Exklave und Russland als ein Land betrachtet, das im dualen Graphen nur durch eine Ecke repräsentiert wird, nicht planar ist.





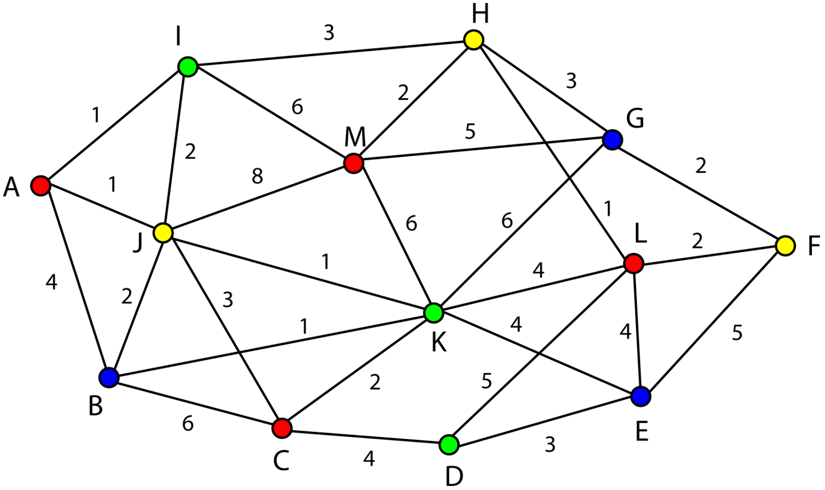
Der duale Graph enthält als Untergraph ein $K_{3,3}$ mit Lettland, Litauen und Polen auf der einen und Russland, Weißrussland und der Ostsee auf der anderen Seite.

Aufgabe 7.12 a)

Färben Sie die Ecken des Übungsgraphen von Abbildung 7.43 so, dass benachbarte Ecken verschiedene Farben haben. Versuchen Sie mit einer minimalen Anzahl von Farben auszukommen.

Die nachfolgende Lösung kommt mit 4 Farben aus. Mit weniger Farben geht es nicht, weil der Graph den K_4 mit den Ecken B, C, K, J als Teilgraphen enthält.

Aufgabe 7.12 a)



Färben Sie die Bundesländer von Deutschland so, dass benachbarte Länder unterschiedliche Farben bekommen, aber insgesamt möglichst wenige Farben verbraucht werden.