fhwedel
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

**Seminar IT-Sicherheit**

# Einführung in die Quantenmechanik

Eingereicht am:

10. Juli 2017

Eingereicht von:

Tom Engel
its102780@fh-wedel.de

Referent:

Prof. Dr. Gerd Beuster
gb@fh-wedel.de

# Inhaltsverzeichnis

**Abbildungsverzeichnis** **III**

**1. Einleitung: Die klassische Physik** **2**
1.1. Newtons Gesetze . . . 2
1.2. Wellentheorie . . . 3
1.3. Teilchen . . . 4

**2. Das Planck'sche Wirkungsquantum** **5**
2.1. Der Schwarze Körper . . . 5
2.2. Was ist das Quantum? . . . 5
2.2.1. Die Quantenhypothese . . . 6

**3. Der Welle-Teilchen-Dualismus** **7**
3.1. Licht . . . 7
3.2. Das Doppelspaltexperiment . . . 7
3.2.1. Das Interferenzmuster . . . 8
3.3. Der Photoelektrische Effekt . . . 8
3.4. Materiewellen . . . 9
3.5. Schrödingers Wellengleichung . . . 9
3.6. Erklärung des Welle-Teilchen-Dualismus . . . 10
3.6.1. Die Born'sche Wahrscheinlichkeitsinterpretation . . . 10
3.6.2. Kollaps der Wellenfunktion . . . 10
3.7. Beispiel: Lösen der Schrödingergleichung . . . 11

**4. Die Heisenberg'sche Unschärferelation** **13**
4.1. Die Bedeutung der Unschärfe . . . 13

**5. Deutungen der Quantenmechanik** **14**
5.1. Schrödingers Katze . . . 14
5.1.1. Aufbau . . . 14
5.1.2. Das Paradoxon - quantenmechanische Zustände . . . 15
5.2. Die Kopenhagener Deutung . . . 16
5.2.1. Unbeantwortete Fragen . . . 16
5.3. Die Vielwelten-Interpretation . . . 16

**Literaturverzeichnis** **17**

**A. Anhang** **18**
A.1. Wien'sches Strahlungsgesetz . . . 18
A.2. Planck-Einheiten . . . 19

# Abbildungsverzeichnis


1.1. Geschwindigkeit einer Welle . . . 3
1.2. Amplitude und Wellenlänge . . . 3
1.3. Verschiedene Teilchen . . . 4

2.1. Rayleigh-Jeans-Gesetz [Cam06, S. 19] . . . 5
2.2. Planck'sches Strahlungsgesetz [Cam06, S. 20] . . . 5
2.3. Quantenhypothese . . . 6
2.4. Energie eines Lichtquants . . . 6

3.1. Erwartete Verteilung bei zwei geöffneten Spalten [HHW98, S. 23] . . . 7
3.2. Das Prinzip der Interferenz . . . 8
3.3. Quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsamplitude [HHW98, S. 31] . . . 8
3.4. Ungültige Addition der Wahrscheinlichkeitsamplituden [HHW98, S. 32] . . . 8
3.5. de-Broglie-Beziehung [HHW98, S. 52] . . . 9
3.6. Schrödingers Wellengleichung [HHW98, S. 56] . . . 9
3.7. Reduziertes Planck'sches Wirkungsquantum / Dirac'sche Konstante [TNRoCU17b] . 10
3.8. Schrödingers Wellengleichung für ein Elektron mit eindimensionaler Bewegungsrichtung 11
3.9. Schrödingers Wellengleichung für ein Elektron in einem Kasten . . . 11
3.10. Allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung für den harmonischen Oszillator . . . 11
3.11. Lösung der Schrödingergleichung (= Wellenfunktion) für ein Elektron in einem Kasten der Länge $L$ . . . 12

4.1. Heisenberg'sche Unschärferelation für Ort und Impuls eines Teilchens [Cam06, S. 62] 13

5.1. Imaginärer Versuchsaufbau für das Gedankenexperiment *Schrödingers Katze* . . . 14
5.2. Dirac'sche Klammerschreibweise eines radioaktiven Atoms [Cam06, S. 137] . . . 15
5.3. Schrödingers Katze in Superposition [Cam06, S. 140] . . . 15

A.1. Wien'sches Strahlungsgesetz . . . 18
A.2. Erste Strahlungskonstante . . . 18
A.3. Zweite Strahlungskonstante . . . 18
A.4. Planck-Masse . . . 19
A.5. Planck-Länge . . . 19
A.6. Planck-Zeit . . . 19
A.7. Planck-Ladung . . . 19
A.8. Planck-Temperatur . . . 19

# Vorwort

Diese Seminararbeit zum Thema *Einführung in die Quantenmechanik* ist Teil des Seminars *IT-Sicherheit: Quanten-Computer und (Post-)Quanten-Kryptographie* von Prof. Dr. Gerd Beuster an der Fachhochschule Wedel im Sommersemester 2017. Es werden Grundlagen geschaffen, die dabei helfen sollen, die aktuellen Entwicklungen in den Forschungsfeldern der Quantencomputer allgemein und der damit in Zusammenhang stehenden Quanten- beziehungsweise Post-Quanten-Kryptographie einordnen und beurteilen zu können. Hierfür wird neben der Geschichte der Quantenphysik auf die wichtigsten quantenmechanischen Effekte und Erkenntnisse eingegangen, die hierfür nötig sind. Der andere Teil dieser Einführung wurde von Marc Gerhards ausgearbeitet und enthält detailliertere Beschreibungen des Doppelspaltexperiments, des Photoelektrischen Effekts und der quantenmechanischen Verschränkung.

# 1

# Einleitung: Die klassische Physik

Bevor wir uns den Ideen der Quantentheorie widmen, sind zunächst ein paar Kenntnisse über die physikalische Welt vor der Entdeckung und Beschreibung der Quantisierung nötig. Diese wird auch als *klassische Physik* bezeichnet.

## 1.1. Newtons Gesetze

Die *klassische Physik* ist im Wesentlichen die Physik Isaac Newtons, welche die Grundlage für die heute bekannten Naturwissenschaften bildet und bis zur Entdeckung der Quantisierung unangefochtene Gültigkeit besaß. Die drei charakteristischen Gesetze über die Bewegung wurden 1687 im Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [New87] veröffentlicht:

1. Gesetz: Jedes Objekt bleibt im Ruhezustand oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, solange nicht eine äußere Kraft auf es einwirkt.
2. Gesetz: $Kraft = Masse \times Beschleunigung$
   Es sagt uns also, wie groß die Auswirkung einer äußeren Kraft (oder auch eines *Stoßes*) auf ein Objekt ist. Die Geschwindigkeit des Objektes wird verändert, dies ist die *Beschleunigung*.
3. 3. Gesetz: $Kraft = Gegenkraft$
   Für jede Aktion gibt es eine gleiche, entgegengesetzte Reaktion.

Ein ergänzendes grundlegendes Gesetz der klassischen Physik bildet das Netwon'sche Gravitationsgesetz, nach dem von jedem Objekt mit Masse eine anziehende Kraft ausgeht, die auf sämtliche anderen Massenobjekte wirkt, die Gravitation. Objekte ziehen sich also gegenseitig an, je massereicher ein Objekt, desto stärker die Gravitation, seine Anziehungskraft.

Zusammengenommen können diese Gesetze zwar nicht die Ursache für die Gravitation entschlüsseln, sie beinhalten diese jedoch als vorhandene Naturkonstante und können so zahlreiche Phänomene wie die Bahnen der Planeten im Sonnensystem für ihre Zeit zufriedenstellend erklären. Erweitert durch das Konzept einer Kraft, die wirkt, wenn zwei Objekte sich gegeneinander bewegen (die sogenannte *Reibung*), bilden sie die Grundlage der gesamten Mechanik und sind damit in der Lage, auch Ereignisse auf der Erdoberfläche zu erklären [Gri96].

## 1.2. Wellentheorie

Für das Verständnis der später auftretenden Wellenfunktion ist ein Grundverständnis der wellentheoretischen Begriffe notwendig. Wellen sind sich im Raum ausbreitende Schwingungen, die Energie transportieren. Sie werden insbesondere durch die folgenden Begriffe charakterisiert:

- **Amplitude** $y$: Der Abstand eines Wellenkamms zur Oberfläche
- **Wellenlänge** $\lambda$: Abstand eines Wellenkamms zum nächsten, oder der Abstand zweier Punkte auf einer Welle
- **Frequenz** $f$: Die Anzahl der Wellen, die pro Sekunde an einem Punkt vorbeiwandern, oder die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde
- **Geschwindigkeit** $c$: Das Produkt von Wellenlänge und Frequenz. Bei elektromagnetischer Strahlung ist dies gerade die *Lichtgeschwindigkeit*, also die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht im Vakuum, eine fundamentale Naturkonstante.

$$c = \lambda \cdot f \tag{1.1}$$

Abb. 1.1.: Geschwindigkeit einer Welle

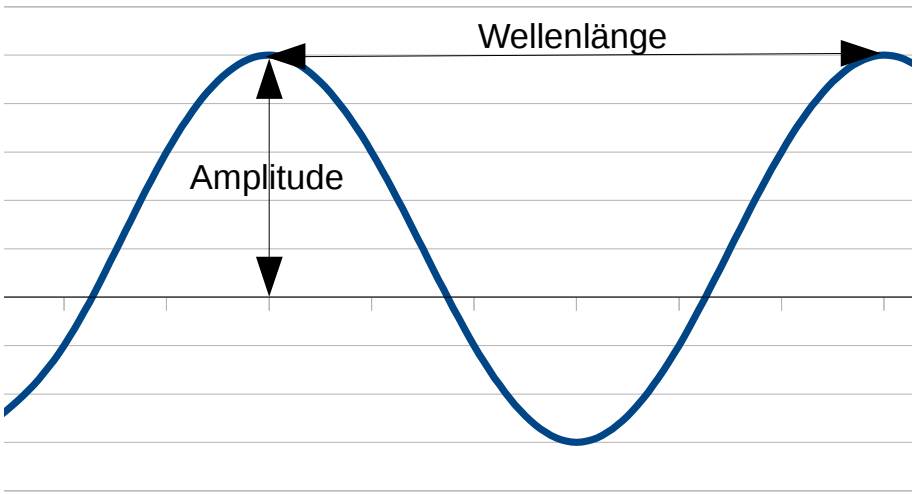


Abb. 1.2.: Amplitude und Wellenlänge

## 1.3. Teilchen

Da in dieser Ausarbeitung oft von verschiedenen *Teilchen* die Rede ist, soll die folgende Abbildung der Einordnung und einer ersten Klassifikation dienen. Sie eignet sich keinesfalls zur Beurteilung von tatsächlichen Größen- oder Positionsverhältnissen, sondern beschreibt lediglich die Beziehungen von elementaren und subatomaren Teilchen zueinander. Die Begriffe *Teilchen* und *Partikel* werden synonym verwendet.

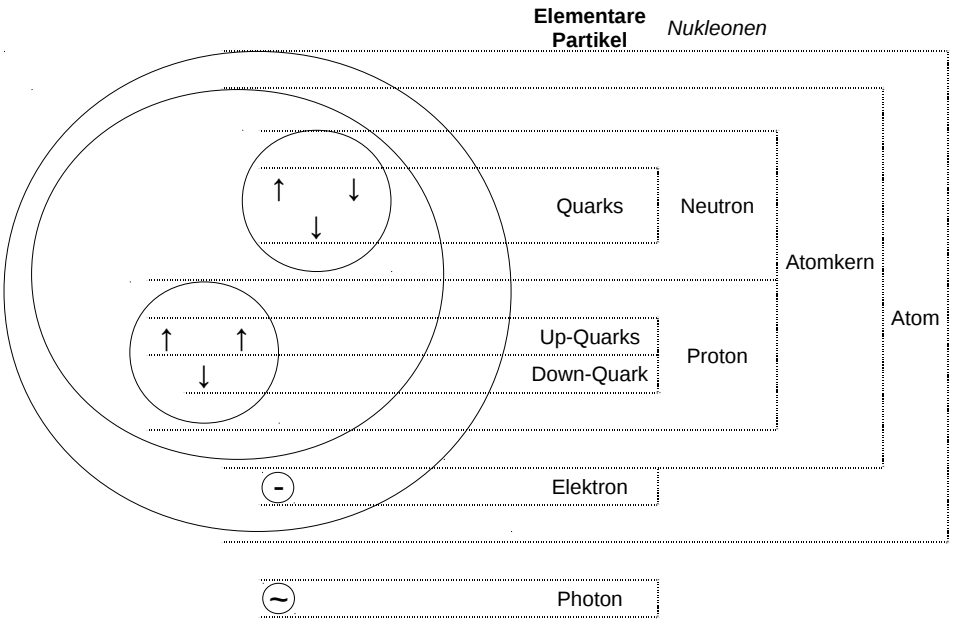


Abb. 1.3.: Verschiedene Teilchen

Nur Quarks, Elektronen und Photonen sind elementare Partikel. Quarks treten niemals allein, sondern immer mindestens als Paar auf (*Quarkeinschluss*). Darüber hinaus existieren noch weitere Elementarteilchen, die aber für die Betrachtung der hier vorgestellten Grundlagen nicht benötigt werden. Alle anderen Teilchen sind aus den elementaren Partikeln zusammengesetzt.

# 2

# Das Planck'sche Wirkungsquantum

## 2.1. Der Schwarze Körper

Ein *Schwarzer Körper* absorbiert jegliche elektromagnetische Strahlung, anstatt sie zu reflektieren. Einen *idealen* Schwarzen Körper, der dies auch restlos tut, gibt es in Wirklichkeit nicht, daher ist dieser eine Art Gedankenexperiment, ein idealisiertes Denkmodell, das für Vorhersagen von Strahlungsarten benutzt wurde [Gri96, S. 49]. Benötigte Eigenschaften zum Nachweis von theoretischen Überlegungen konnten jedoch auch mit genügend angenäherten Versuchsaufbauten überprüft werden. Hierbei fiel jedoch auf, dass sich Theorie und Praxis deutlich unterschieden: Das **Rayleigh-Jeans-Gesetz**, das die Abhängigkeit der Strahlung eines Schwarzen Körpers von Wellenlänge und Temperatur beschreibt, erwies sich nur bei großen Wellenlängen als gültig.[1]

$$P(\lambda; T) = \frac{8\pi k_B T}{\lambda^4} \tag{2.1}$$

Abb. 2.1.: Rayleigh-Jeans-Gesetz [Cam06, S. 19]

Bei sinkender Wellenlänge $\lambda \to 0$ würde die Strahlung $P$ gegen Unendlich gehen. Jeder Körper mit einer Temperatur $> 0$K würde demnach unendlich viel Energie abstrahlen, was jedoch sämtlichen Beobachtungen und dem gesunden Menschenverstand widerspricht. Bei extrem kleinen Wellenlängen passiert nämlich sogar das Gegenteil des Erwarteten und die Leistung der Strahlung ($P$) geht ebenfalls gegen 0 [Cam06, S. 19]. Dieser Widerspruch wird als die *Ultraviolettkatastrophe* bezeichnet, deren Lösung die Geburtsstunde der Quantentheorie markiert.

## 2.2. Was ist das Quantum?

Max Planck erhielt 1919 den Nobelpreis für Physik für die Entdeckung des *Planck'schen Wirkungsquantums* und gilt damit als der Begründer der Quantenphysik [Fou17]. Seine revolutionäre Arbeit bestand darin, die beiden bekannten Beschreibungen des Spektrums eines Schwarzen Körpers, das bereits genannte **Rayleigh-Jeans-Gesetz** (2.1) für den langwelligen Bereich und das **Wien'sche Strahlungsgesetz** (siehe A.1) für den kurzwelligen, zu einer einzigen Formel zu verbinden, dem **Plank'schen Strahlungsgesetz**:

$$P(f; T) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \cdot \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \tag{2.2}$$

Abb. 2.2.: Planck'sches Strahlungsgesetz [Cam06, S. 20]

[1] $k_B$ bezeichnet die *Boltzmannkonstante* $\approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ und $T$ die Temperatur in Kelvin.

Zentral ist hier der von Planck selbst als *Kunstgriff*[2] bezeichnete Faktor $h$, das Planck'sche Wirkungsquantum selbst, als Koeffizient der Frequenz.

Dass nämlich die Frequenz $f$, also letzendlich die vom Schwarzen Körper emmitierte oder absorbierte Menge an Strahlung selbst mit einem unveränderlichen Faktor $h = 6.626070040 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ [TNRoCU17a] versehen ist, bedeutet, dass es nicht möglich ist, kleinere Energiemengen auszutauschen. Ein *Quant* ist also eine *Energieportion* und zwar die kleinste Energieportion, die in der Natur möglich ist.[3]

### 2.2.1. Die Quantenhypothese

Das Planck'sche Strahlungsgesetz (2.2) impliziert also die Abhängigkeit der Energie $E$ elektromagnetischer Strahlung von ihrer Frequenz $f$ und der neu eingeführten Konstante $h$. Diese Annahme wird als **Quantenhypothese** bezeichnet. Die Energie ergibt sich aus dem Produkt beider Werte.

$$E = h \cdot f \tag{2.3}$$

Abb. 2.3.: Quantenhypothese

Da wir bereits wissen, wie die Geschwindigkeit einer (elektromagnetischen) Welle berechnet wird (1.1), können wir uns die Bedeutung noch etwas klarer machen:

$$c = \lambda \cdot f \Leftrightarrow f = \frac{c}{\lambda}; (2.3) \Rightarrow E = \frac{hc}{\lambda} \tag{2.4}$$

Abb. 2.4.: Energie eines Lichtquants

Die Energie $E$ eines Lichtquants ist also proportional zu seiner Frequenz $f$ und umgekehrt proportional zu seiner Wellenlänge $\lambda$ [Cam06, S. 21].

[2] Planck sag $h$ zunächst nur als Hilfskonstante, Albert Einstein bestätigte es jedoch später bei seiner Erklärung des Photoelektrischen Effekts als Naturkonstante [Gri96, S. 60f].

[3] Hieraus leitet sich ein ganzes System von natürlich definierten und ebenfalls jeweils *elementaren* Einheiten ab, die *Planck-Einheiten* (siehe A.2).

# 3

# Der Welle-Teilchen-Dualismus

## 3.1. Licht

Die Erforschung des Lichts spielt eine zentrale Rolle in der Erforschung und Entwicklung der Quantenmechanik, da hier die als *Welle-Teilchen-Dualismus* bekannte Erkenntnis ihren Ursprung nahm. Zunächst herrschte die Vorstellung, dass Licht aus diskreten, elementaren Teilchen bestehe. Diese wurden als *Korpuskel* bezeichnet. Die dazugehörige Theorie ist die *Korpuskeltheorie*, die 1704 von Isaac Newton als Teil seiner *Optik* [NI30] veröffentlicht wurde. Unter anderem konnte mit ihrer Hilfe der Regenbogen erstmalig physikalisch erklärt werden. Über hundert Jahre hielt die Theorie diverser Kritik stand, doch 1802 führte der Physiker Thomas Young ein Experiment durch, das es zum Ziel hatte, die Korpuskeltheorie abzulösen. Es sollte die Ansicht bestätigt werden, dass das Licht nicht als Teilchen existiert, sondern stattdessen als eine Wellenbewegung aufzufassen sei.

## 3.2. Das Doppelspaltexperiment

Ursprünglich mit Licht durchgeführt, funktioniert das Doppelspaltexperiment grundsätzlich mit jeder Art von *Teilchen*. Im hier beschriebenen Beispiel [HHW98, S.29ff] handelt es sich um eine Version mit Elektronen.

Für das Doppelspaltexperiment wird eine Teilchenquelle (hier eine *Elektronenkanone*, ein glühender Metalldraht) vor einem Detektorschirm aufgestellt. Der Detektorschirm ist hier mit einer phosphoreszierenden Substanz beschichtet, sodass jedes mal ein Lichtblitz abgegeben wird, wenn ein Elektron auf den Detektor trifft. Zwischen Quelle und Detektor befindet sich eine dünne Metallplatte mit zwei Spalten. Die beiden Spalte können getrennt voneinander verschlossen werden.

Ist jeweils nur ein Spalt geöffnet, scheint die Teilchenhypothese bestätigt. Ist der linke Spalt geöffnet, werden auf der linken Seite des Detektors gehäuft Elektronen registriert (Verteilung $P_1$), analog gilt dies für die rechte Seite (Verteilung $P_2$). Wenn nun beide Spalte geöffnet werden, erwarten wir intuitiv eine Verteilung, die der Summe der beiden vorher beobachteten Verteilungen entspricht.

$$P_{12} \stackrel{?}{=} P_1 + P_2 \tag{3.1}$$

Abb. 3.1.: Erwartete Verteilung bei zwei geöffneten Spalten [HHW98, S. 23]

Tatsächlich ergibt sich bei zwei geöffneten Spalten aber ein Muster, das entsteht, wenn Wellen miteinander interferieren. Man spricht vom *Interferenzmuster*. Wir können nun nichts darüber aussagen, welchen Spalt ein Elektron bei seinem Weg zum Detektor passiert hat. Der *Welle-Teilchen-Dualismus* äußert sich hier dahingehend, dass den untersuchten Quantenobjekten scheinbar paradoxe Eigenschaften von Teilchen und von Wellen gleichermaßen zugeschrieben werden (müssen). Zwar werden diskret messbare Teilchen von der Quelle abgegeben und am Detektor wieder als einzelne

Teilchen registriert, auf dem Weg zum Detektor verhalten sie sich jedoch wie Wellen, indem sie miteinander interferieren.

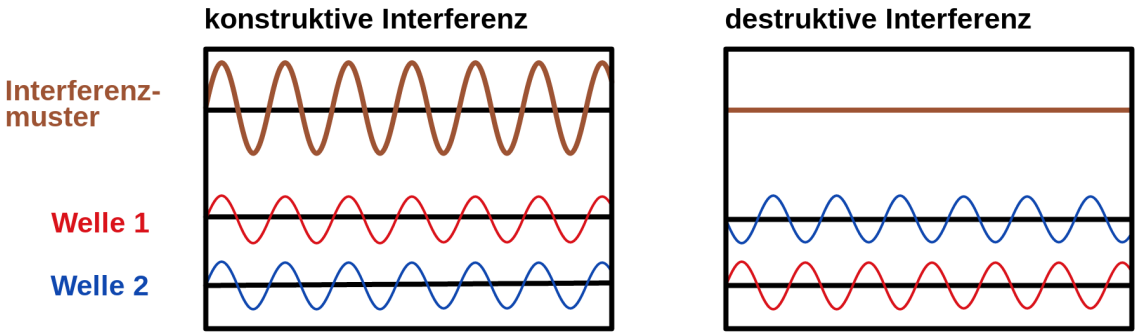


Abb. 3.2.: Das Prinzip der Interferenz

### 3.2.1. Das Interferenzmuster

Um das Interferenzmuster mathematisch beschreiben zu können, wird die Ankunftswahrscheinlichkeit eines Elektrons an einem Ort auf dem Detektor gemessen. Es wird also eine Art Wellenamplitude für Elektronen gesucht. Das Quadrat dieser Wellenamplitude entspricht nun genau der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons, man spricht von der *quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsamplitude*.

$$P_{12} = (\Psi_1 + \Psi_2)^2, P_1 = {\Psi_1}^2, P_2 = {\Psi_2}^2 \tag{3.2}$$

Abb. 3.3.: Quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsamplitude [HHW98, S. 31]

Dementsprechend gilt weiterhin, dass die gemessenen Wahrscheinlichkeitsamplituden sich nicht einfach addieren lassen.

$$P_{12} \neq P_1 + P_2 \tag{3.3}$$

Abb. 3.4.: Ungültige Addition der Wahrscheinlichkeitsamplituden [HHW98, S. 32]

Die geschilderten Beobachtungen können in der Quantenmechanik nur beschrieben und nicht abschließend erklärt werden.

## 3.3. Der Photoelektrische Effekt

Wenn eine Metallplatte mit Licht bestrahlt wird, können sich aus ihr Elektronen lösen. Dieses als *Photoelektrischer Effekt* bekannte Phänomen wurde 1887 vom deutschen Physiker Heinrich Hertz entdeckt [Her87]. Erklärt werden konnte dieser aber durch die Wellentheorie der elektromagnetischen Strahlung nicht [Cam06, S. 24]. Dies gelang erst Albert Einstein, als er 1905 die Quantenhypothese (2.3) erfolgreich auf dieses Phänomen anwendete [Ein05]. Als eine Art Nebeneffekt schaffte er es hierbei auch, sehr genaue Werte für $h$ zu ermitteln. Aus den Ergebnissen folgt, dass eben auch das Licht quantisiert ist, also scheinbar doch aus einzelnen Teilchen besteht, die heute als *Photonen* bezeichnet werden. Einsteins Arbeit bestätigt das Planck'sche Wirkungsquantum als fundamentale Eigenschaft der Natur und enthob es endgültig dem ihm von Planck selbst zuvor zugeschriebenen Status eines rein mathematischen *Kunstgriffes*.

## 3.4. Materiewellen

Zunächst wurde nur das Licht durch Photonen, also Teilchen, beschrieben, während ihm gleichzeitig dort, wo es nötig war, Welleneigenschaften zugeschrieben wurden. Louis Victor de Broglie vermutete 1924 in seiner Doktorarbeit [DB24] solche Welleneigenschaften für sämtliche Materie, also alle Teilchen, auch die bisher immer als diskret angenommene Elektronen. Eine Annahme der Dissertation ist die *de-Broglie-Beziehung*, die jedem Teilchen mit einem Impuls $p$ eine Wellenlänge $\lambda$ zuordnet, die als *Materiewelle* bezeichnet wird.

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{3.4}$$

Abb. 3.5.: de-Broglie-Beziehung [HHW98, S. 52]

Hier wird deutlich, warum quantenmechanische Effekte in unserer alltäglichen Welt eine so untergeordnete Rolle spielen. Da der Wert von $h$ verschwindend klein ist [TNRoCU17a], der Impuls $p$ von makroskopischen Objekten aber im Gegenzug sehr groß, ergibt sich Objekte außerhalb der Größenordnung von Teilchen eine extrem kurze Wellenlänge. Wollten wir nun beispielsweise ein Doppelspaltexperiment mit Tennisbällen statt Elektronen durchführen, so müssten die beiden Spalte einen Abstand zueinander haben, der der Wellenlänge ihrer Materiewelle entspricht. $\lambda$ liegt aber bei Objekten der Kategorie Tennisball weit unterhalb atomarer Größenordnungen. Ein Experiment zur Beobachtung quantenmechanischer Effekte mit makroskopischen Objekten ist also schlicht undenkbar [HHW98, S. 53].

## 3.5. Schrödingers Wellengleichung

Zum Thema Herleitung der Schrödingergleichung soll uns folgendes Zitat von Richard Feynman genügen:

*"Woher haben wir das? Nirgendwoher. Es ist nicht möglich, dies von irgend etwas Bekanntem herzuleiten. Es kam aus dem Geist Schrödingers, der es bei seinen Bemühungen, ein Verständnis der experimentellen Beobachtungen der realen Welt zu finden, einführte."* [FLS73, S. 354]

Die Gleichung, die Erwin Schrödingers Namen trägt, beschreibt, wie sich Materiewellen (beziehungsweise -wellen) im Raum ausbreiten und ermöglicht extrem genaue Vorhersagen, ähnlich der Newton'schen Gesetze, aber eben nicht für makroskopische, sondern für mikroskopische Objekte. Sie enthält die *Wellenfunktion* $\psi$ als Lösung, deren Wellenlänge die de-Broglie Beziehung (3.4) beschreibt [Cam06, S. 120]. Die in (3.2) beschriebenen *Wahrscheinlichkeitsamplituden* sind im Prinzip genau solche Wellenfunktionen. (siehe 3.6.1) Auch der Begriff *Zustandsfunktion* wird synonym verwendet.

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + V\Psi \tag{3.5}$$

Abb. 3.6.: Schrödingers Wellengleichung [HHW98, S. 56]

$E$ bezeichnet die Gesamtenergie des Teilchens, für das die Wellenfunktion $\Psi$ bestimmt werden soll, das sich in der Dimension $x$ bewegt. $V$ ist die potentielle Energie des betrachteten Teilchens, das *Potential*.

Die Konstante $\hbar$ bezeichnet das *reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum* oder auch die *Dirac'sche Konstante*.

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054571800 \cdot 10^{-34} J \cdot s \tag{3.6}$$

Abb. 3.7.: Reduziertes Planck'sches Wirkungsquantum / Dirac'sche Konstante [TNRoCU17b]

## 3.6. Erklärung des Welle-Teilchen-Dualismus

Niels Bohr sagte über die Frage, welches Modell denn nun das *richtige* sei einmal, *beide* theoretischen Vorstellungen, die der Teilchenphysik und die der Wellenphysik, seien gleichermaßen gültig, seien komplementäre Beschreibungen einer und derselben Realität (*Komplementarität*) [Gri96, S. 133]. Die elementaren Partikel sind also weder Welle, noch Teilchen, verhalten sich aber in bestimmten Situationen wie die eine oder das andere. Auch folgt daraus, dass demnach beide Beschreibungen unvollständig sind und es vielmehr von dem jeweiligen Anwendungsfall abhängt, welche Theorie geeigneter ist.

### 3.6.1. Die Born'sche Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Max Born bestätigte 1926 als Experimentalphysiker in Göttingen quasi täglich den Teilchencharakter von Elektronen, suchte aber dennoch einen Weg, Schrödingers Wellenfunktion mit den Teilchen zu verknüpfen. Er hielt die Teilchen zwar für real, sah sie aber als von der Wellenfunktion *gelenkt*.

Führen wir ein Experiment durch, bei dem Teilchen lokalisiert werden sollen (zum Beispiel das Doppelspaltexperiment), beschreibt das quadrierte Ergebnis der Wellenfunktion $|\Psi(x,t)|^2$, die wir als Ergebnis der Schrödingergleichung erhalten, demnach die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens am Ort $x$ zur Zeit $t$ [Gri96, S. 133f]. Gemäß den üblichen statistischen Implikationen ist es also theoretisch möglich, dass sich ein Teilchen an einem unerwarteten Ort, *irgendwo*, befindet, dies ist nur äußert unwahrscheinlich. Diese Erkenntnis bildet einen Teil des *Unbestimmtheitsprinzips*, welches der Quantenmechanik innewohnt und mit Heisenbergs Unschärferelation weiter bestätigt wird.

### 3.6.2. Kollaps der Wellenfunktion

Der Übergang zwischen den Beschreibungen von Quantenobjekten durch Wellen- und Teilchenmodell wird als *Kollaps der Wellenfunktion* bezeichnet. Dieser kann mit dem Doppelspaltexperiment relativ anschaulich dargestellt werden. Vom Abschuss eines Teilchens bis zum Zeitpunkt der Detektion auf dem Schirm wird seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch eine Wellenfunktion beschrieben. Es befindet sich mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit an jedem möglichen Ort (*Superposition*). Im Moment der Beobachtung jedoch wird ein diskretes Teilchen auf dem Schirm detektiert. In diesem Moment *kollabiert* die Wellenfunktion, wenn das Objekt plötzlich an einem Ort detektiert wird und damit einen möglichen Wert von $\Psi^2$ annimmt. Der Rest der zuvor interferierenden Welle, scheint in diesem Moment einfach zu verschwinden [Cam06, S. 78f]. Nach der Kopenhagener Deutung (5.2) liegt der Kollaps der Wellenfunktion begründet im Messprozess.

## 3.7. Beispiel: Lösen der Schrödingergleichung

*Das folgende Beispiel ist [HHW98, Anhang 2] entnommen.*

Mit dem Wissen, dass $\Psi^2$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt, kann für den Fall eines Elektrons in einem einfachen Kastenpotential (*ein Teilchen in einem Kasten*) die Schrödingergleichung ohne größere Hilfsmittel gelöst werden. Der Einfachheit halber wird eine eindimensionale Bewegungsrichtung ($x$) unterstellt. Bei realen Versuchen wäre diese Größe dreidimensional. Dies ändert jedoch nichts am grundlegenden Lösungsverfahren, wir sparen uns aber die erhöhte mathematische Komplexität, die durch die Verallgemeinerung entstünde.

$$E\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x) \tag{3.7}$$

Abb. 3.8.: Schrödingers Wellengleichung für ein Elektron mit eindimensionaler Bewegungsrichtung

Unser betrachtetes Elektron wird durch das Potential im Kasten gehalten, außerhalb wird das Potential als unendlich groß vorausgesetzt, sodass dort die Auftrittswahrscheinlichkeit ($\Psi^2$) verschwindet. Unsere gesuchte Wellenfunktion hat also nur innerhalb des Kastens sinnvolle Werte. $x = 0$ und $x = L$ stellen diese *Wände* dar.

$$E\Psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} \; mit \; 0 \leq x \leq L \tag{3.8}$$

Abb. 3.9.: Schrödingers Wellengleichung für ein Elektron in einem Kasten

Der Übersichtlichkeit halber wird substituiert:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \xrightarrow{k \text{ in } (3.8)} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = -k^2\Psi \tag{3.9}$$

Die Lösung der nun erhaltenen Gleichung ergibt also zweimal abgeleitet wieder dieselbe Funktion mit dem Faktor $-k^2$ und ist in der klassischen Physik bekannt (*harmonischer Oszillator*) mit der allgemeinen Lösungsform:

$$\Psi(x) = A \; sin(kx) + B \; cos(kx) \tag{3.10}$$

Abb. 3.10.: Allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung für den harmonischen Oszillator

$A$ und $B$ sind Konstanten der Randbedingungen, in unserem Fall die *Wände* des Kastens. Für $x = 0$ ergibt sich:

$$\Psi(x = 0) = A \; sin(0) + B \; cos(0) = 0 \tag{3.11}$$

$B$ ist also 0, da der Sinus von 0 wiederum 0 ist. Der Kosinus von 0 ist 1. Für $x = L$ erhalten wir also:

$$\Psi(x = L) = A \; sin(kL) = 0 \tag{3.12}$$

$A$ kann nicht 0 sein, da die Wellenfunktion nicht überall verschwinden darf. Es muss also $kL = 0$ gesetzt werden. Diese Forderung ist erfüllt, wenn $kL$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi$ ist. Die Lösungen für unser Problem sind also alle Wellenfunktionen, die der folgenden Bedingung genügen:

$$k = \frac{n\pi}{L} \text{ mit } n \in \mathbb{N}_1 \tag{3.13}$$

Aus (3.9) folgen die quantisierten Energiewerte, die den zulässigen Energieniveaus $E_n$ im Kastenpotential entsprechen:

$$(3.9) \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \;\Rightarrow\; E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \; mit \; n \in \mathbb{N}_1 \tag{3.14}$$

Nun fehlt noch die Randbedingungs-Konstante $A$. Da wir wissen, dass das Quadrat der Wellenfunktion $\Psi^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit darstellt und wir uns sicher sind, dass das Elektron *irgendwo* angetroffen werden *muss*, muss die Summe aller möglichen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten 1 ergeben. Wir erhalten die Normierungsbedingung:

$$\int_0^L [(x)]^2 dx = 1 \text{ für } \Psi(x) = A \; sin(kx) \tag{3.15}$$

Dieses Integral lässt sich ausrechnen und es ergeben sich:

$$\frac{A^2 L}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}} \tag{3.16}$$

Die vollständige Wellenfunktion eines Teilchens in einem Kasten der Länge $L$ lautet also:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} sin(\frac{n\pi x}{L}) \text{ mit } n \in \mathbb{N}_1 \tag{3.17}$$

Abb. 3.11.: Lösung der Schrödingergleichung (= Wellenfunktion) für ein Elektron in einem Kasten der Länge $L$

# 4

# Die Heisenberg'sche Unschärferelation

In der klassischen Physik sind alle Messgrößen, genügend genaue Messinstrumente vorausgesetzt, stets bekannt und vor allem genau bestimmbar. Aus diesem deterministischen Weltbild würde folgen, dass, wenn man den Ort und Bewegungszustand (ausgedrückt durch das Produkt von Masse und Geschwindigkeit, den *Impuls* $p = m \cdot c$) kennt, den Zustand des gesamten Universums in der Vergangenheit und seine Änderungen in der Zukunft berechnen könnte.

Werner Heisenberg widerlegte diesen möglichen Determinismus 1927 mit der nach ihm benannten *Unschärferelation*, nach der das Produkt der Messfehler, die zwangsläufig bei der Bestimmung von Ort und Impuls eines Teilchens entstehen, immer größer oder gleich einer Konstanten ist, die niemals 0 ist.

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4.1}$$

Abb. 4.1.: Heisenberg'sche Unschärferelation für Ort und Impuls eines Teilchens [Cam06, S. 62]

Die Messfehler $\Delta$ der jeweiligen Eigenschaft werden auch als *Unschärfe* bezeichnet.

## 4.1. Die Bedeutung der Unschärfe

Banal gesagt bedeutet dies, je genauer wir den Impuls eines Teilchens kennen, desto weniger kennen wir seinen Ort und umgekehrt. Doch die eigentliche Aussage der Unschärferelation geht noch weiter. Demnach sind nämlich die *Messfehler* nicht ein Ergebnis von ungenauen Messinstrumenten, sondern die Unschärfe ist eine grundsätzliche Eigenschaft der Natur. Ein Teilchen *hat* zum Zeitpunkt einer Messung einfach nicht gleichzeitig einen beliebig genauen Ort *und* Impuls. Es ist uns demnach unmöglich, die Realität genau zu kennen. Auch trifft die Gültigkeit nicht nur für Ort und Impuls zu, sondern für sämtliche Paare von Variablen, deren Produkt Einheiten der *Wirkung* ($Energie \cdot Zeit$) ergeben [Gri96, S. 171]. Diese werden auch als *komplementäre Observablen* oder *konjugierte Variablen* bezeichnet. Es gibt also noch weitere Merkmalspaare, die sich nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmen lassen, Ort und Impuls sind nur das einfachste und anschaulichste Beispiel.

# 5

# Deutungen der Quantenmechanik

## 5.1. Schrödingers Katze

Schrödingers Katze ist ein Gedankenexperiment von Erwin Schrödinger, das er 1935 im Rahmen seiner Analyse *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik* [Sch35] entwickelte um das Problem aufzuzeigen, dass die Erkenntnisse der Quantenmechanik und ihre Kopenhagener Deutung die Grenze zwischen Mikrokosmos mit gültiger Quantenmechanik und Makrokosmos mit gültiger klassischer Physik nicht klar abgrenzen können.

### 5.1.1. Aufbau

In einem möglichst gut isolierten Behältnis werden eine radioaktive Substanz, ein Detektor für radioaktiven Zerfall (*Geigerzähler*), ein tödliches Gift und eine Katze deponiert. Die Katze lebt. Der Geigerzähler und das Gift sind außerdem über einen Mechanismus verbunden, der dafür sorgt, dass, wenn ein Atom der radioaktiven Substanz zerfällt und die abgegebene Strahlung detektiert wird, das tödliche Gift freigesetzt wird, sodass die Katze stirbt. Zerfällt während der Versuchsdauer kein Atom, bleibt die Katze am Leben.

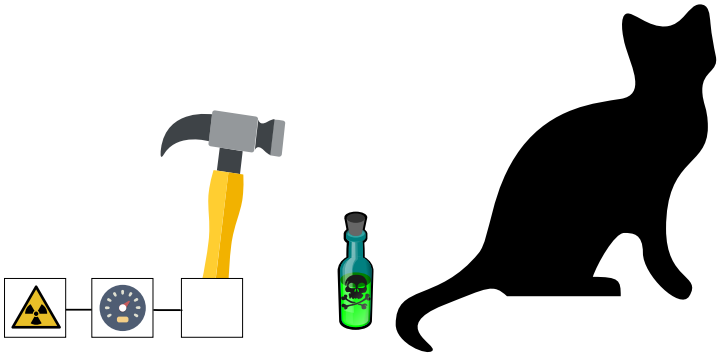

Abb. 5.1.: Imaginärer Versuchsaufbau für das Gedankenexperiment *Schrödingers Katze*

### 5.1.2. Das Paradoxon - quantenmechanische Zustände

Das radioaktive Atom ist ein Quantenobjekt. Es verhält sich also nach den Regeln der Quantenmechanik und befindet sich demnach in Superposition in allen möglichen Zuständen der ihm zugeordneten Zustandsfunktion $\Psi(x,t)$, die wir mit Hilfe der Schrödingergleichung bestimmt werden kann. Man spricht auch von der Überlagerung der Zustände.

Für die Beschreibung von quantenmechanischen überlagerten Zuständen entwickelte Paul Dirac eine koordinatenfreie Schreibweise, die *Bra-Ket-Notation*, oder auch die *Dirac'sche Klammerschreibweise.*

Der überlagerte Superpositionszustand unseres betrachteten Atoms würde in der Dirac-Notation folgendermaßen ausgedrückt:

$$|\Psi\rangle = a\,|zerfallen\rangle + b\,|unzerfallen\rangle \tag{5.1}$$

Abb. 5.2.: Dirac'sche Klammerschreibweise eines radioaktiven Atoms [Cam06, S. 137]

Die Faktoren $a$ und $b$ entsprechen den Wahrscheinlichkeiten des jeweils beschriebenen Zustands, gemäß der Born'schen Wahrscheinlichkeitsinterpretation (3.6.1) muss die Summe aller möglichen Zustände also 1 ergeben, da hier ein Ereignis beschrieben wird: $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Das Atom befindet sich also, solange es nicht beobachtet wird, mit einer vorhersagbaren Wahrscheinlichkeit (vorausgesetzt, wir kennen die Halbwertszeit des vorliegenden Atoms), in *einem* Zustand, in welchem es zu $a$ % zerfallen *und* (gleichzeitig) zu $b$ % unzerfallen ist. Fragen Sie sich bitte nicht, wie ein solches Atom aussehen könnte, das gleichzeitig zerfallen und unzerfallen ist; hier endet die menschliche Vorstellungskraft. Der quantenmechanische Formalismus ist aber dennoch in der Lage, trotzdem korrekte Versuchsergebnisse vorauszusagen. [Cam06, S. 138].

Die Idee von Schrödingers Katze ist nun, uns diese gegen unsere Intuition gehenden Eigenschaften zu demonstrieren, indem sie aus dem Mikrokosmos durch den gewählten Versuchsaufbau in den für uns sinnvollen Makrokosmos, nämlich die Katze, zu übertragen. Tatsächlich befindet sich dadurch, dass wir die Katze in ihrem Behältnis nicht sehen können, auch diese solange in einem Zustand der Überlagerung, bis wir sie beobachten und die Wellenfunktion kollabiert:

$$|\Psi_{Katze}\rangle = a\,|tot\rangle + b\,|lebendig\rangle \tag{5.2}$$

Abb. 5.3.: Schrödingers Katze in Superposition [Cam06, S. 140]

## 5.2. Die Kopenhagener Deutung

Die *Kopenhagener Deutung* der Quantenmechanik wurde 127 von Niels Bohr und Werner Heisenberg unter Einbeziehung der Born'schen Wahrscheinlichkeitsinterpretation (3.6.1) in Kopenhagen entwickelt. Ihre drei wesentlichen Konzepte sind [Gri96, S. 136]:

1. **U**nbestimmtheit: Wir können Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig kennen, woraus folgt, dass die Zukunft nicht deterministisch vorhergesagt werden kann. Dies gilt aber tatsächlich nur *vorwärts* in der Zeit, die Vergangenheit, also Orte und Impulse von Teilchen, die in der Zeit zurück liegen, können rückwärts exakt berechnet werden [Gri96, S. 175].
2. Komplementarität: Wellen- und Teilchenmodell sind gleichermaßen nötig zur Beschreibung von Quantenobjekten. Beide Modelle sind unvollständig, ein Elektron ist *in Wirklichkeit* weder Welle, noch Teilchen.
3. Wahrscheinlichkeit und Störung des beobachteten Systems durch den Beobachter: Ein unbeobachtetes Quantensystem funktioniert ungestört, solange es nicht beobachtet wird. Die Beobachtung stellt jedoch eine so große Wechselwirkung dar, dass es nicht mehr als unabhängig existierend angenommen werden kann, sondern mit dem Beobachter verbunden betrachtet werden muss (Holistisches Weltbild) [Gri96, S. 176]. Durch diese Wechselwirkung wird der Kollaps der Wellenfunktion ausgelöst, erst in diesem Moment wird das Gemessene physikalische Realität. Über nicht messbare Observablen werden keine Aussagen getroffen.

### 5.2.1. Unbeantwortete Fragen

Die Kopenhagener Deutung ist zwar in sich konsistent und gilt als die *Standardinterpretation* der Quantenmechanik, lässt aber einige Fragen offen [Cam06, S. 146]:

1. Was ist ein (geschlossenes) (Quanten-) System?
2. Wer ist ein Beobachter / was ist eine Beobachtung?

## 5.3. Die Vielwelten-Interpretation

Die Vielwelten-Interpretation aus der Doktorarbeit von Hugh Everett von 1957 [Eve57] geht davon aus, dass die Wellenfunktion nicht kollabiert, sondern alle durch sie beschriebenen Zustände gleichermaßen existieren. Es wird ein sogenannter *Hyperraum* propagiert, in welchem es eine unendliche Zahl von Universen gibt, die jeweils einen möglichen Zustand repräsentieren. Im Moment der Beobachtung kollabiert die Wellenfunktion nicht, es wird lediglich eine mögliche Alternative aus der großen Anzahl von Möglichkeiten *ausgewählt* [Gri96, S. 251f].

# Literaturverzeichnis


[Cam06] S. A. Camejo. *Skurrile Quantenwelt.* Springer, 2006.

[DB24] Louis De Broglie. *Recherches sur la théorie des Quanta.* Theses, Migration - université en cours d'affectation, November 1924.

[Ein05] A. Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322(6):132–148, 1905.

[Eve57] Hugh Everett. "Relative State" Formulation of Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 29:454–462, Jul 1957.

[FLS73] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands. *Feynman Vorlesungen über Physik Band III.* R. Oldenbourg, 1973.

[Fou17] The Nobel Foundation. The nobel prize in physics 1918. `https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1918/`, Mai 2017.

[Gri96] J. Gribbin. *Auf der Suche nach Schrödingers Katze: Quantenphysik und Wirklichkeit.* Serie Piper. Piper, 1996.

[Her87] H. Hertz. Ueber einen Einfluss des ultravioletten Lichtes auf die electrische Entladung. *Annalen der Physik*, 267(8):983–1000, 1887.

[HHW98] A.J.G. Hey, T. Hey, and P. Walters. *Quantenuniversum: die Welt der Wellen und Teilchen.* Spektrum, Akad. Verlag, 1998.

[New87] I. Newton. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687.

[NI30] I. Newton and W. Innys. *Opticks: Or, A Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light.* William Innys at the West-End of St. Paul's., 1730.

[Sch35] E. Schrödinger. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23(48):807–812, 1935.

[TNRoCU17a] Units The NIST Reference on Constants and Uncertainty. Plack constant h. `http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?h`, Mai 2017.

[TNRoCU17b] Units The NIST Reference on Constants and Uncertainty. Planck constant over 2 pi. `http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?hbar`, Mai 2017.

# A
# Anhang

## A.1. Wien'sches Strahlungsgesetz

$$\Phi(\lambda) = \frac{C}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c}{\lambda T}}} \tag{A.1}$$

Formel A.1.: Wien'sches Strahlungsgesetz

Die beiden zunächst angenommenen Konstanten $C$ und $c$ wurden erst später durch Max Planck ausgedrückt:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2 \tag{A.2}$$

Formel A.2.: Erste Strahlungskonstante

$$c = \frac{h \cdot c}{k_B} \tag{A.3}$$

Formel A.3.: Zweite Strahlungskonstante

**Quelle**: `https://de.wikipedia.org/wiki/Wiensches_Strahlungsgesetz` Mai 2017

## A.2. Planck-Einheiten

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \tag{A.4}$$

Formel A.4.: Planck-Masse

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \tag{A.5}$$

Formel A.5.: Planck-Länge

$$t_P = \frac{l_P}{c} \tag{A.6}$$

Formel A.6.: Planck-Zeit

$$q_P = \sqrt{\hbar c 4\pi\epsilon_0} \tag{A.7}$$

Formel A.7.: Planck-Ladung

$$T_P = \frac{m_P c^2}{k} \tag{A.8}$$

Formel A.8.: Planck-Temperatur

**Quelle**: https://de.wikipedia.org/wiki/Planck-Einheiten Mai 2017