F A C H H O C H S C H U L E   W E D E L

Ausarbeitung zum Seminarvortrag

in der Fachrichtung

Wirtschaftsinformatik

Thema:

Multiagentensysteme

- Entscheidungsfindung für den Gruppenvorteil -

Eingereicht von:	Dirk Eickhoff (WInf6412)
Erarbeitet im:	6. Semester
Abgegeben am:	16. Juni 2010
Betreuender Dozent:	Prof. Dr. Sebastian Iwanowski Fachhochschule Wedel Feldstraße 143 22880 Wedel

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Motivation

Jeder einzelne Agent (ein System in welcher Art auch immer, also z. B. eine Person oder ein Programm(-teil)) kennt seine eigenen Präferenzen und kann danach die für sich beste Entscheidung treffen. Aber was passiert, wenn die Entscheidungen nicht autark, sondern strategisch in Bezug auf die Entscheidung anderer Agenten gefällt werden können? Diese Frage über die Entscheidungsfindung und Wahlverfahren in Gruppen wird in Kapitel 2 beantwortet.

Wenn man nicht die Entscheidung für eine Präferenz, sondern den Nutzen eines Agenten betrachtet, den er erwirtschaften kann, optimiert sich jeder Agent so, dass er einen möglichst großen Nutzen erhält. Aber irgendwann ist die Selbstoptimierung ausgereizt. Um einen noch größeren Nutzen zu erlangen, muss er auch seine Umwelt wahrnehmen und auf andere Agenten reagieren bzw. mit diesen zusammenarbeiten. Hier kommt das Thema der Koalitionsbildung ins Spiel, das in Kapitel 3 behandelt wird.

2 Treffen von Gruppenentscheidungen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit einigen wichtigen Wahltheorien und Abstimmungsverfahren. Aber zuerst führen wir einige Notationen ein, um die Sachverhalte formalisieren zu können.

Wir gehen von einer endlichen Menge von Agenten $Ag = \{1, ..., n\}$ aus. Bei Wahlverfahren ist es am einfachsten sich die Agenten als Personen, die als Wähler auftreten, vorzustellen. Meistens wird die Anzahl der Agenten so modelliert, dass sie ungerade ist. Damit wird versucht die Wahrscheinlichkeit zu minimieren, dass Schleifen bei der Wahl auftreten.

Diese Wähler fällen Gruppenentscheidungen in Bezug auf eine endliche Menge von möglichen Ergebnissen bzw. (Wahl-)Kandidaten $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$. Jeder Agent ordnet für sich alle möglichen Ergebnisse nach seinen eigenen Präferenzen zu einer Präferenzreihenfolge. Eine mögliche Präferenzreihenfolge von Agent i über die möglichen Ergebnisse $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ist z. B. $(\omega_3, \omega_1, \omega_2)$. D. h. dass Agent i das Ergebnis ω_3 dem Ergebnis ω_1 vorzieht, kurz $\omega_3 > \omega_1$, sowie $\omega_1 > \omega_2$ und $\omega_3 > \omega_2$.

Man kann sich hinter einem Ergebnis immer einen Wert vorstellen, der größer oder kleiner ist als ein anderer Wert eines anderen Ergebnisses, dadurch lassen sich die einzelnen Ergebnisse leicht mathematisch vergleichen. Theoretisch ist es auch möglich, dass einzelne Ergebnisse gleich bewertet werden oder nicht quantifizierbar sind, aber das wollen wir der Einfachheit halber hier nicht betrachten.

Die Präferenzreihenfolgen der Agenten $1, ..., n$ schreibt man wie folgt: $\omega_1, ..., \omega_n$. Dabei bedeutet $\omega >_i \omega'$, dass in der Präferenzreihenfolge von ω_i des Agenten i das Ergebnis ω vor dem Ergebnis ω' eingeordnet ist. Die Menge aller möglichen Präferenzreihenfolgen schreibt man als $\Pi(\Omega)$.

2.1 Problem der Aggregation in der Sozialwahltheorie

Jeder Agent definiert für sich seine Präferenzreihenfolge. Um aber zu einer Gruppenentscheidung zu kommen, müssen alle Präferenzreihenfolgen der Agenten zu einer einzigen Präferenzreihenfolge aggregiert werden, sodass das Ergebnis die einzelnen Präferenzreihenfolgen am besten widerspiegelt. Dazu gibt es die soziale Wohlfahrtsfunktion und die soziale Auswahlfunktion.

2.1.1 Soziale Wohlfahrtsfunktion

Die soziale Wohlfahrtsfunktion ist definiert als:

$$f_W\colon \underbrace{\Pi(\Omega) \times \cdots \times \Pi(\Omega)}_{n\ Mal} \to \Pi(\Omega)$$

Es werden von n Agenten die Präferenzreihenfolgen zu einer „sozialen Präferenzreihenfolge" als Ergebnis aggregiert, vom Ergebnis mit dem höchsten Wert bis zum Ergebnis mit dem geringsten Wert. Um auf die soziale Präferenzreihenfolge zu referieren, schreibt man z. B. $\omega >^* \omega'$, um zu zeigen, dass das Ergebnis ω über ω' in der sozialen Präferenzreihenfolge liegt.

2.1.2 Soziale Auswahlfunktion

Die soziale Auswahlfunktion ist definiert als:

$$f_A\colon \underbrace{\Pi(\Omega) \times \cdots \times \Pi(\Omega)}_{n\ Mal} \to \Omega$$

Als Eingabe verlangt die Funktion von n Agenten die Präferenzreihenfolge und das Ergebnis ist ein einziger Kandidat aus Ω.

2.2 Abstimmungsverfahren

Hier betrachten wir einige für die Gruppenentscheidung wichtigen Abstimmungsverfahren.

2.2.1 Mehrheitswahl

Das Verfahren der Mehrheitswahl (auch Mehrheitsentscheid oder Pluralitätswahl genannt) ist wohl das einfachste und bekannteste Verfahren. Es ist eher dafür geeignet ein Ergebnis bzw. einen Kandidaten zu bestimmen, als eine Präferenzreihenfolge.

Bei dem Abstimmungsverfahren geben alle Agenten bzw. Wähler ihre Präferenzreihenfolge ab, oder um es zu vereinfachen nur ihre höchste Präferenz. Dann wird nach der Anzahl des Auftretens der Erstplatzierungen entschieden welcher Kandidat gewonnen hat.

Beispiel: Wahl des studentischen Vertreters im Hochschul-Senat

Wenn nur zwei Kandidaten zur Wahl stehen, handelt es sich um eine einfache Mehrheitswahl.

Es gibt noch eine Unterscheidung in relativer und absoluter Mehrheitswahl. Bei der absoluten Mehrheitswahl muss ein Kandidat mehr als 50% der Stimmen erlangen. Wenn keiner die absolute Mehrheit erreicht, werden meistens mehrere Wahlgänge mit Streichung der schlechtesten Kandidaten durchgeführt, bis es einen Gewinner gibt (Stichwahlen). Bei der relativen Mehrheitswahl reicht eine relative Mehrheit zum Sieg. In Beispielen beziehen wir uns immer auf die relative Mehrheitswahl.

Wenn mehr als zwei Kandidaten zur Auswahl stehen, können Anomalien auftreten. Betrachten wir dazu ein Beispiel:

$|Ag| = 10$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, wobei ω_1 sei Schokoladeneis, ω_2 sei Vanilleeis und ω_3 sei Zitroneneis. Die zehn Personen sollen ihre Präferenzreihenfolgen offen aufstellen und die Eissorte mit den meisten Erstplatzierungen wird an alle ausgeteilt.

Angenommen drei Personen präferieren Schokoladeneis vor Vanilleeis und wollen auf gar keinen Fall Zitroneneis, drei andere Personen wählen Vanilleeis vor Schokoladeneis und

Zitroneneis als letztes und die vier letzten Personen präferieren Zitroneneis, dann würde Zitroneneis gewinnen, obwohl 60% (die Mehrheit) Zitroneneis nicht wollte.

Die Unzufriedenheit ist groß, daher auch der Wille die Wahl zu manipulieren. Da die Präferenzreihenfolgen allen bekannt sind, wissen die ersten beiden Gruppen, dass ihre Erstwahl keine Chance hat zu gewinnen. Um das kleinere Übel als Ergebnis zu erhalten, wählt z. B. die erste Gruppe taktisch ihre Zweitwahl, Vanilleeis, als erstes. Durch diese strategische Manipulation gewinnt Vanilleeis mit sechs zu vier Stimmen vor Zitroneneis.

Eine weitere Anomalie beschreibt das Condorcet-Paradoxon. Bei der Wahl im Rahmen von z. B. drei Agenten und drei Kandidaten mit den Präferenzreihenfolgen:

$$\omega_1 >_1 \omega_2 >_1 \omega_3$$

$$\omega_2 >_2 \omega_3 >_2 \omega_1$$

$$\omega_3 >_3 \omega_1 >_3 \omega_2$$

gibt es keinen eindeutigen Gewinner, da jeder ein Mal erstplatziert ist. Wenn wir ω_1 als Sieger nehmen, gibt es eine Gegenmehrheit von 2/3. Das gleiche gilt für die anderen beiden Kandidaten.

In der Demokratie scheint es intuitiv unmöglich jeden Wähler zufrieden zu stellen, aber das Condorcet-Paradoxon zeigt, dass es Szenarien gibt, bei denen es egal ist welches Ergebnis gewählt wird, es gibt immer eine Mehrheit, die damit unglücklich ist.

2.2.2 Sequentielle Mehrheitswahlen

Bei der sequentiellen Wahl treten immer zwei Kandidaten in einer paarweisen Wahl gegeneinander an. Der Gewinner zieht weiter in die nächste Runde und tritt gegen den nächsten Kandidaten an. So wird eine Serie von Wahlen durchgeführt und der Gewinner der letzten Wahl ist der Gesamtgewinner.

Der Aufbau einer Wahlagenda von z. B. ω_2, ω_3, ω_4, ω_1 kann linear (siehe Abb. 1) oder als ausgewogener Binärbaum (siehe Abb. 2) geordnet sein.

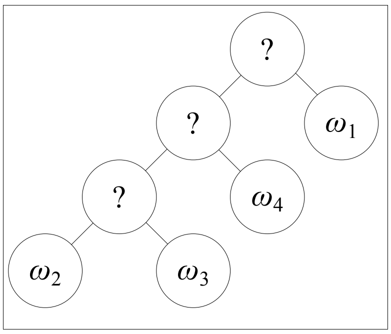

Abbildung 1: Linear geordnete Wahlagenda.

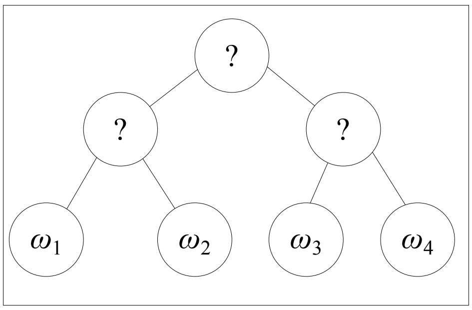

Abbildung 2: Wahlagenda als ausgewogener Binärbaum.

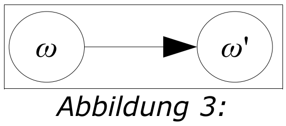

Abbildung 3: Mehrheitsgraph: ω gewinnt gegen ω' in paarweiser Wahl.

Sequentielle Mehrheitswahlen können gut in Mehrheitsgraphen dargestellt werden. Sie bestehen aus Knoten, die die Kandidaten repräsentieren und aus gerichteten Kanten. Es existiert eine gerichtete Kante von einem Kandidaten ω zu einem Kandidaten ω', wenn ω in der sozialen Präferenzreihenfolge vor ω' eingeordnet ist, d. h. wenn ω in einer paarweisen Wahl gegen ω' gewinnt (siehe Abb. 3). Zwischen zwei beliebigen Kandidaten ω_i und ω_j muss stets eine gerichtete Kante existieren, sodass ω_i gegen ω_j gewinnt oder umgekehrt, aber nicht beides zugleich. Weiterhin kann ein Kandidat sich nicht selbst besiegen (gerichtete Kante zu sich selbst).

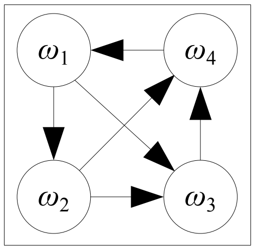

Abbildung 4: Beispiel Mehrheitsgraph

An einem Beispiel kann man gut eine Schwäche der sequentiellen Mehrheitswahl zeigen. Abb. 4 zeigt einen Mehrheitsgraphen zu einer möglichen sozialen Präferenzreihenfolge. Die Schwäche liegt darin, dass die Aufstellung der Agenda in manchen Szenarien entscheidet, welcher Kandidat gewinnt. Wählen wir ω_2, ω_3, ω_4, ω_1, gewinnt ω_2 gegen ω_3, dann ω_2 gegen ω_4 und als letztes gewinnt ω_1 gegen ω_2. ω_1 ist also Gesamtgewinner. Wählen wir dagegen ω_2, ω_1, ω_4, ω_3, ist ω_3 Gesamtgewinner. Daher stehen sequentielle Mehrheitswahlen immer potentiell unter Verdacht, dass sie manipuliert wurden, auch wenn ein guter Verteilungsalgorithmus für die Agenda verwendet wurde. Man könnte natürlich generell sagen, dass Agenden nach dem Zufallsprinzip aufgestellt werden, aber in der Politik ist es beispielsweise unerwünscht, dass eine Entscheidung dem Zufall überlassen wird.

Da eine Agenda den Ausgang der Wahl entscheiden kann, heißt ein Kandidat möglicher Gewinner, wenn es eine Agenda gibt, in der er Gesamtgewinner ist. Condorcet Gewinner heißt der Kandidat, der in allen Agenden Gesamtgewinner ist. Ein Condorcet Gewinner kann einfach in einem Mehrheitsgraphen bestimmt werden, denn es ist der einzige Kandidat, der Kanten von sich zu allen anderen Kandidaten hat.

Die sequentielle Mehrheitswahl wird z. B. bei Schönheitswettbewerben (linear) oder Fußballturnieren (Binärbaum) angewandt.

2.2.3 Borda-Wahl

Der Vorteil der Borda-Wahl gegenüber der normalen Mehrheitswahl ist, dass die gesamte Präferenzreihenfolge verwertet wird und nicht nur die höchste Präferenz. Jeder Kandidat erhält einen numerischen Wert entsprechend seiner Position in einer Präferenzreihenfolge. Der erste in einer Präferenzreihenfolge erhält den Wert $k = |\Omega| - 1$ und der letzte 0, die Vergabe ist also absteigend. Die Werte werden für jede Präferenzreihenfolge vergeben. Zur Auswertung werden die Kandidaten nach den addierten Werten absteigend sortiert. Der Gewinner ist der Kandidat mit den meisten Punkten.

Ein Borda-Paradoxon kann entstehen, wenn in mehreren Wahldurchgängen die z. B. jeweils letzten Kandidaten gestrichen werden. Dadurch können sich die Punkteverteilungen derart verschieben, dass ein ganz anderes Ergebnis herauskommt, als erwartet. Erwartet werden würde die gleiche Präferenzreihenfolge, nur dass die gestrichenen Kandidaten nicht mehr vorhanden sind.

In abgewandelter Form wird die Borda-Wahl beim Eurovision Song Contest und auch bei der Formel 1 angewandt. Die vorderen Platzierungen erhalten dabei absteigend feste Punktwerte und die letzteren keine Punkte.

2.2.4 Slater Rangordnung

Die Slater Rangordnung findet die soziale Rangordnung ohne Zyklen, die einem Mehrheitsgraphen (der Zyklen enthält) am nähesten entspricht. Für jede soziale Rangordnung wird gezählt wie viele Kanten umgedreht werden müssen, um einen konsistenten Graphen zu erhalten. Jedes Umdrehen einer Kante entspricht den Kosten von 1. Die Rangordnung mit den geringsten Kosten wird schließlich als optimales Ergebnis gewählt.

Nach der naiven Methode der Berechnung, werden für alle möglichen Rangordnungen die Kosten bestimmt und dann die soziale Rangordnung mit den geringsten Kosten gewählt. Diese Methode ist NP-schwer zu berechnen.

Im Jahr 2006 hat Vincent Conitzer einen Artikel veröffentlicht, in der er eine Methode zeigt, mit der die Slater Rangordnung in linearer Zeit berechnet werden kann.[1]

Beispiel:

Der Mehrheitsgraph aus Abb. 4 sei gegeben. Wir wollen jetzt die soziale Rangordnung ohne Zyklen mit den geringsten Kosten finden.

Exemplarisch bestimmen wir die Kosten der sozialen Rangordnung $\omega_1 >^* \omega_2 >^* \omega_3 >^* \omega_4$. Wir brauchen nur die Kante zwischen ω_1 und ω_4 umdrehen, um einen zyklenfreien Graphen herzustellen, der die obige Rangordnung wiedergibt. Die Kosten sind also 1. Wenn wir für alle weiteren möglichen sozialen Rangordnungen die Kosten bestimmen würden, würden wir zu dem Ergebnis kommen, dass obige Rangordnung die geringsten Kosten hat und somit das optimale Ergebnis ist.

2.3 Wünschenswerte Eigenschaften von Abstimmungsverfahren

2.3.1 Pareto Bedingung

Für die einzelnen Agenten ist ein Ergebnis Pareto-Optimal, wenn es kein anderes Ergebnis gibt, bei dem ein Agent ein besseres Ergebnis erzielt, ohne, dass ein anderer Agent schlechter dargestellt wird. Für die Gruppenentscheidung allerdings besagt die Pareto Bedingung, dass wenn alle Wähler ω_i über ω_j ordnen, dann ist auch ω_i in der sozialen Präferenzreihenfolge über ω_j: $\omega_i >^* \omega_j$.

Die Mehrheitswahl, Borda-Wahl und Diktatur genügen der Pareto Bedingung.

2.3.2 Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Wenn $\omega_i >^* \omega_j$ gilt, dann gilt es auch, wenn Agenten ihre Präferenzreihenfolge ändern, aber die relative Ordnung von ω_i und ω_j erhalten bleibt. D. h. für die soziale Entscheidung darf nur die direkte Präferenzordnung zweier beliebiger Kandidaten zueinander eine Rolle spielen, ohne Berücksichtigung anderer Alternativen. Die soziale Ordnung zwischen zwei Kandidaten wird also so erstellt, als ob es nur diese beiden gäbe.

Überraschend wenige Verfahren genügen dieser Bedingung. Mehrheitswahl, Borda-Wahl und sequentielle Mehrheitswahl genügen ihr nicht, aber die Diktatur.

2.3.3 Condorcet Sieger Bedingung

Wie bereits in Kapitel 2.2.2 beschrieben ist ein Kandidat Condorcet Sieger, wenn er in einer Abstimmung mit paarweisen gegeneinander Antreten gegen alle Konkurrenten gewinnt. Die Condorcet Sieger Bedingung besagt dabei, dass wenn ein Kandidat Condorcet Sieger ist, dieser in der Präferenzreihenfolge an erster Stelle stehen muss, sodass er z. B. bei der sozialen Auswahlfunktion ausgewählt werden würde.

Nur die sequentielle Mehrheitswahl genügt dieser Bedingung.

2.3.4 Nicht-Diktatur

Eine Diktatur liegt in einem Wahlverfahren vor, wenn sie einer sozialen Wohlfahrts-funktion gehorcht, bei der ein Agent i existiert dessen eigene Präferenzreihenfolge der

[1] Conitzer, Vincent: Computing Slater Rankings http://www.cs.duke.edu/~conitzer/slaterAAAI06.pdf

sozialen Präferenzreihenfolge entspricht. Alle anderen Präferenzreihenfolgen werden ignoriert.

$$f_W(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_i$$

Die Eigenschaft der Diktatur ist für Abstimmungsverfahren nicht wünschenswert. Die bisher beschriebenen Wahlverfahren unterliegen keiner Diktatur, aber die Diktatur erfüllt die wünschenswerten Eigenschaften der Pareto Bedingung und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen.

2.3.5 Arrow-Theorem

Die Kernaussage des Arrow-Theorems (1951 von Arrow veröffentlicht) ist, dass es keine „guten" Sozialwahlverfahren gibt. Gut in dem Sinne, dass sie alle vorher beschriebenen wünschenswerten Eigenschaften haben. Wenn wir also versuchen ein Verfahren zu entwickeln, das aus einer Menge von Präferenzreihenfolgen ein eindeutiges soziales Ergebnis hervorbringt und gleichzeitig noch die wünschenswerten Eigenschaften besitzt, besagt das Arrow-Theorem, dass es unmöglich ist.

Beispiel: Gehen wir einmal davon aus, dass unser neu entwickeltes Verfahren die Pareto Bedingung und die Eigenschaft der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen besitzt und außerdem mindestens zwei Wähler und mindestens drei Kandidaten vorliegen. Was für ein Abstimmungsverfahren haben wir konstruiert? Eine Diktatur! Anders formuliert: Jedes Verfahren, das der Pareto Bedingung und der Eigenschaft der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen genügt, ist eine Diktatur. Es können also nie alle Eigenschaften gleichzeitig erfüllt werden.

2.4 Strategische Manipulation

Eine soziale Auswahlfunktion ist manipulierbar, wenn für einen Agenten i eine Präferenzreihenfolge ω_i' existiert, so dass

$$f_A(\omega_1, \ldots, \omega_i', \ldots, \omega_n) \succ_i f_A(\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots, \omega_n).$$

Wenn es eine solche Präferenzreihenfolge gibt, lohnt es sich für Agenten i nicht seine wahren Präferenzen anzugeben, sondern zu „lügen", um einen höheren Nutzen zu erlangen.

Anfang der 70iger Jahre wurde in dem **Gibbard-Satterthwaite-Theorem** sogar gezeigt, dass ein Wahlverfahren mit mindestens drei Kandidaten immer entweder manipulierbar oder eine Diktatur ist. Da es keine Regel gibt, die vorschreibt die Wahrheit zu sagen, wird jeder Agent versuchen seinen Nutzen durch falsche Darstellung seiner Präferenzen zu erhöhen. Das einzige Hindernis daran ist der Rechenaufwand, um das Optimum zu bestimmen, der sehr hoch ist (bis NP-schwer).

Taylor hat im Jahr 2005 bewiesen, dass das Gibbard-Satterthwaite-Theorem und das Arrow-Theorem äquivalent sind[2].

Ernüchtert durch diese Erkenntnisse wurde aber zum Glück weiter geforscht, um nicht manipulierbare Verfahren zu finden. Ziel ist es Verfahren zu entwickeln, bei denen wahrheitsgemäße Aussagen rational sind und keine Falschdarstellungen. Dann braucht jeder Agent nur noch seine Präferenzordnung bestimmen, ohne Berücksichtigung der anderen Agenten.

[2] Vgl. Wooldridge, MultiAgent Systems, 2009, S. 265

Ein Erfolg in dieser Richtung stellt das **Offenbarungsprinzip** dar, es besagt, dass wenn man ein Verfahren für eine soziale Auswahlfunktion hat, existiert auch ein Verfahren, in der wahrheitsgemäße Aussagen rational sind[3,4].

3 Bildung von Koalitionen

In dem vorherigen Kapitel sind wir davon ausgegangen, dass keine Abkommen zwischen den einzelnen Agenten getroffen werden. Dieses ändert sich nun, da für die Bildung von Koalitionen, um einen Vorteil zu erhalten, Vereinbarungen getroffen werden dürfen.

3.1 Kooperative Spiele

Zuerst kommen wieder ein paar Formalismen zur Definition von kooperativen (oder Koalitions-) Spielen.

Ein kooperatives Spiel $\Gamma=(Ag, \nu)$ wird als Paar von einer endlichen Menge von Agenten $Ag = \{1, \ldots, n\}$ und einer Charakteristik $\nu: 2^{Ag} \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben. Die Charakteristik erwartet als Eingabe eine Menge von Agenten, also eine Koalition $C \subseteq Ag$. Als Ergebnis liefert sie einen reellen Wert, der den Nutzen $k = \nu(C)$ darstellt, den die Koalition erwirtschaften kann, wenn sie zusammenarbeitet. Dieser Wert wird dann unter den Koalitionsmitgliedern aufgeteilt. Eine Koalition definiert nur eine Menge von Agenten. Eine Zusammenarbeit ist nicht zwangsläufig vorhanden, wie man intuitiv von einer Koalition denken könnte. Wenn $C = Ag$, dann heißt C „große Koalition".

Wir werden hier die kollektive Handlung nur sehr abstrakt betrachten und beschränken uns deswegen auf den Nutzwert k. Weiterhin nehmen wir die Charakteristik als gegeben hin, ohne zu wissen wie die Koalition genau miteinander kooperiert. Wir gehen davon aus, dass $\nu(C)$ der höchste Nutzen ist, der von der Koalition erlangt werden kann.

Jetzt stellen sich die Fragen welche Koalitionen sich bilden und wie der Nutzen aufgeteilt wird. Das Spiel selbst sagt darüber nichts aus, die Agenten bzw. Koalitionsmitglieder müssen dieses selbst aushandeln.

3.1.1 Koalitionslebenszyklus

Der Koalitionslebenszyklus (siehe Abb. 5) beschreibt welche Phasen durchlaufen werden, bis Koalitionen koordiniert handeln. Am Anfang ist jeder Agent mit seinen eigenen Ressourcen, Fähigkeiten und Zielen alleine. Durch Abkommen zwischen den Agenten bilden sich dann Koalitionen, in denen die Mitglieder zusammen versuchen werden einen Mehrwert zu schaffen. Dazu muss innerhalb der Koalition das Optimalitätsproblem gelöst werden, in Bezug wer was mit welchen Ressourcen macht. Wie das Optimalitätsproblem gelöst wird, wollen wir hier aber nicht näher betrachten, da es nicht zu diesem Seminarthema passt. Zum Schluss handeln die Koalitionen und verteilen den erwirtschafteten Wert auf ihre Mitglieder.

Wir wollen jetzt die Bildung von Koalitionen und die Verteilung des Nutzens auf die Koalitionsmitglieder näher betrachten.

---
3 Vgl. Wooldridge, MultiAgent Systems, 2009, S. 265
4 Auctions (Revelation Principle) https://wiki.cc.gatech.edu/theory/index.php/Auctions

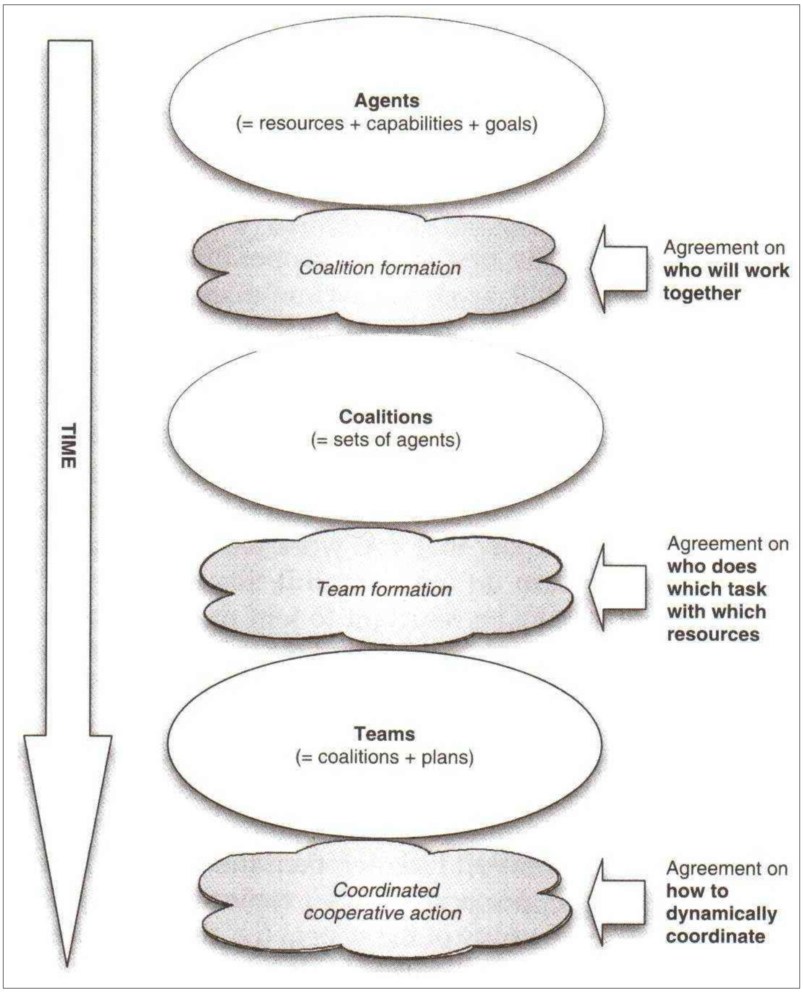

Abbildung 5: Koalitionslebenszyklus [Quelle: Wooldridge, MultiAgent Systems, 2009, S. 272]

3.1.2 Der Kern

Jeder Agent kennt die Charakteristik des Spiels und weiß wie viel jede Koalition verdient. Intuitiv will jeder in die Koalition, die am meisten verdient, aber ein hart arbeitender und gut verdienender Agent wird wohl nicht mit einem faulen und schlecht verdienenden Agenten zusammenarbeiten wollen. Der hart arbeitende Agent würde dann lieber eine eigene Koalition gründen oder sich einer anderen anschließen. Es bilden sich also nur Koalitionen, in denen alle Agenten es vorziehen Mitglied zu sein, also wenn es sich für keinen lohnt sie zu verlassen. Man kann die Frage „Welche Koalitionen bilden sich?" also auch so formulieren: „Welche Koalitionen sind stabil?". Dabei ist aber noch zu beachten, dass wenn eine Koalition stabil ist, sie sich nicht zwingend bildet, da es mehrere stabile geben kann.

Um zu bestimmen welche Koalitionen stabil sind, hilft die Definition des Kerns. Der Kern beinhaltet die Menge aller möglichen Auszahlungsvektoren, die von keiner Koalition abgelehnt wird.

Das Ergebnis einer Koalition $C = \{1, ..., k\}$ in einem Spiel (Ag, v) ist der Auszahlungsvektor $x = (x_1 \; \dots \; x_k)$, die Verteilung des Nutzens auf die einzelnen Mitglieder. Dabei gilt, dass die Summe der einzelnen Auszahlungen der Charakteristik von C entsprechen muss: $\sum_{i \in C} x_i = v(C)$.

Zum Verständnis konstruieren wir ein Beispiel an der großen Koalition:

$Ag = \{1,2\}$, $\nu(\{1\}) = 2$, $\nu(\{2\}) = 2$, $\nu(\{1,2\}) = 6$

Die möglichen Verteilungen des Nutzens auf die beiden Agenten lauten: $(6\ 0)$, $(5\ 1)$, $(4\ 2)$, $(3\ 3)$, $(2\ 4)$, $(1\ 5)$, $(0\ 6)$. Bei den ersten beiden Verteilungen würde Agent 1 die Koalition verlassen, da er weniger bekommen würde als wenn er alleine arbeiten würde. Das gleiche gilt für Agent 2 bei den letzten beiden Verteilungen. Die Verteilungen $(4\ 2)$ und $(2\ 4)$ sind zwar nicht fair, aber keiner der Agenten würde diese ablehnen. Der Kern ist demnach nicht leer und beinhaltet die Auszahlungsvektoren $(4\ 2)$, $(3\ 3)$ und $(2\ 4)$. Die große Koalition ist also stabil.

Auf die nun aufkommende Frage „Wann ein Kern leer ist und was dann passiert?" möchte ich hier nicht weiter eingehen. Die Antwort ist aber in dem Buch „Kooperative Spieltheorie" von Harald Wiese[5] zu finden.

Welche Verteilung fair ist und welche Koalitionen sich letztendlich wirklich bilden, wird von dem Kern nicht bestimmt. Außerdem ist die Berechnung aller Verteilungen von allen möglichen Koalitionen ($2^{|Ag|} - 1$ Teilmengen) sehr aufwendig.

Um eine faire Verteilung zu erhalten hat Lloyd Shapley im Jahre 1953 ein Lösungskonzept, den Shapley-Wert, veröffentlicht.

3.1.3 Shapley-Wert

Der Shapley-Wert funktioniert nach dem Grundsatz, dass jeder Agent entsprechend seiner Leistung, also nach dem Beitrag, den er einer Koalition hinzufügt, ausgezahlt wird.[6] Dazu hat Shapley den Marginalen Beitrag (Mehrwert) μ_i für einen Agenten i eingeführt. D. h. wenn i einer Koalition C beitritt, fügt i C den Mehrwert μ_i hinzu, es entsteht also eine Art Synergie.

$$\mu_i(C) = \nu(C \cup \{i\}) - \nu(C) \text{ unter der Bedingung, dass } C \subseteq Ag \setminus \{i\}.$$

Weiterhin führt Shapley folgenden (Fairness-)Axiome ein, um die Eigenschaften einer fairen Verteilungsfunktion zu definieren:

Symmetrie

Jeder Agent erhält ausschließlich entsprechend seines Beitrages eine Auszahlung. Wenn Agenten den gleichen Beitrag leisten, erhalten sie auch gleiche Auszahlungen.

Dummy-Spieler

Oder auch unwichtiger Spieler genannt, ist ein Agent, der mit keiner Koalition eine Synergie hat. Er trägt immer nur das bei, was er auch alleine erwirtschaften kann.

$$\mu_i(C) = \nu(\{i\}) \text{ für alle } C \subseteq Ag \setminus \{i\}$$

[5] Vgl. Wiese: Kooperative Spieltheorie, 2005, S. 159ff

[6] Vgl. Wiese: Kooperative Spieltheorie, 2005, S. 197ff

Additivität

Wenn zwei Spiele kombiniert werden, erhält ein Agent die Summe von Auszahlungen, die er in den einzelnen Spielen bekommt, nicht mehr und auch nicht weniger. Ein Agent erhält keinen extra Vor- oder Nachteil, wenn er öfters spielt.

Gehen wir von zwei Spielen $\Gamma^1=(Ag, v^1)$ und $\Gamma^2=(Ag, v^2)$ mit verschiedenen Charakteristiken, aber den gleichen Agenten aus, werden diese derart miteinander addiert $\Gamma^{1+2}=(Ag, v^{1+2})$, dass die beiden Charakteristiken addiert werden $v^{1+2}(C)=v^1(C)+v^2(C)$, sodass für einen Agenten i gilt, dass sich die einzelnen Shapley-Werte (Auszahlungen) addieren $sh_i^{1+2}=sh_i^1+sh_i^2$.

Die Idee hinter der Berechnung des Shapley-Werts ist, dass ein Agent den durchschnittlichen marginalen Beitrag erhalten soll, den er zu allen Koalitionen hinzufügt. Diese Idee muss aber noch erweitert werden, denn dabei wird nicht berücksichtigt in welcher Reihenfolge eine Koalition gebildet wird. Es macht einen Unterschied, ob ein Agent als z. B. zweiter oder als zweihundertster einer Koalition beitritt. Deswegen müssen alle möglichen Position von Agent i in den Koalitionen berücksichtigt werden. Dafür definieren wir die Funktion $\Pi(Ag)$ als Menge aller möglichen Anordnungen der Agenten in Ag und die Funktion $C_i(o)$, die die Menge der Vorgänger von i in der Reihenfolge $o \in \Pi(Ag)$ ausgibt.

Beispiel:

Gehen wir von den Agenten $Ag = \{1, 2, 3\}$ aus, so ist die Permutation

$$\Pi(Ag)=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}.$$

Nehmen wir uns einmal die Reihenfolge $o = (3, 1, 2)$ heraus, dann ist $C_3(o)=\{\}$, $C_1(o)=\{3\}$ und $C_2(o)=\{1,3\}$.

Der Shapley-Wert wird dann nach folgender Formel berechnet:

$$sh_i=\frac{1}{|Ag|!}\cdot\sum_{o\in\Pi(Ag)}\mu_i(C_i(o))$$

Die Berechnung ist exponentiell zu der Anzahl von Agenten, weswegen diese Art der Berechnung in der Praxis nicht verwendet wird. Es gibt aber eine lineare Approximation, die auf Zufallsverteilungen basiert, die eine lineare Komplexität in der Anzahl der Agenten hat.[7]

Shapley hat außerdem bewiesen, dass alle Gleichungen, die die Fairness-Axiome erfüllen, der Shapley-Wert sind.[8]

3.2 Berechenbarkeits- und Darstellungsprobleme

In diesem Kapitel wollen wir uns die Berechenbarkeit und Darstellungsmöglichkeiten von kooperativen Spielen und speziell der Charakteristik ansehen.

Wenn man einfach alle möglichen Koalitionen mit ihren Ergebnissen aufschreibt, hat man bei 20 Agenten bereits über 1 Mio. Einträge ($2^{|Ag|}+1$ Einträge)! Man sucht also eine Darstellungsform, die in der Balance zwischen einer präzisen (ausführlichen) und knappen (vielleicht nicht vollständigen) Schreibweise liegt. Einige Möglichkeiten wollen wir uns jetzt ansehen.

[7] Vgl. Fatima / Wooldridge / Jennings: Linear Approximation, 2008, S. 1ff
[8] Vgl. Wooldridge, MultiAgent Systems, 2009, S. 276

3.2.1 Modulare Darstellung

Der **induzierte Teilgraphen** stellt die Charakteristik als ungerichteten Graphen dar. Die Knoten sind die Agenten aus Ag und die Kanten haben Gewichte, hier zur Vereinfachung nur ganze Zahlen. Das Gewicht einer Kante von i zu j wird als $w_{i,j}$ geschrieben. Den Nutzwert einer Koalition berechnet man aus den Kantengewichten der verbundenen Knoten:

$$v(C)=\sum_{\{i,j\}\subseteq C} w_{i,j}$$

Der induzierte Teilgraph ermöglicht eine knappe aber nicht vollständige Darstellung der Charakteristik. Es können also nicht alle Charakteristiken abgebildet werden.[9] Für die es möglich ist, ist der Induzierte Teilgraph eine gute Lösung. Als Adjazenzmatrix aufgeschrieben, ergeben sich nur $|Ag|^2$ Einträge.

Bei der Berechnung des Shapley-Werts wird der Graph in Teilgraphen mit zwei Knoten herunter gebrochen. Daher fällt der induzierte Teilgraph auch unter die modulare Darstellung. Wegen des Symmetrie-Axioms erhält jeder angrenzende Agent die Hälfte des Gewichtes einer Kante. Mit Hilfe des Additivitätsaxioms können diese Teilgraphen als einzelne Spiele betrachtet werden und so der Shapley-Wert für einen Agenten i leicht addiert werden:

$$sh_i=\frac{1}{2}\sum_{j\neq i} w_{i,j}$$

Die Berechnung des Shapley-Werts ist in polynomialer Zeit möglich und die Bestimmung, ob der Kern leer ist, ist NP-vollständig.

Beispiel:

Nehmen wir einmal an, dass der induzierte Teilgraph in Abb. 6 die Charakteristik für ein Spiel mit den Agenten $Ag = \{A, B, C, D\}$ darstellt. Dann hat die Koalition $C = \{C, D\}$ (siehe Abb. 7) das Ergebnis $v(\mathrm{C}) = 1 + 5 = 6$ und der Agent B den Shapley-Wert von $sh_B = \frac{1}{2} \cdot (2 + 4) = 3$.

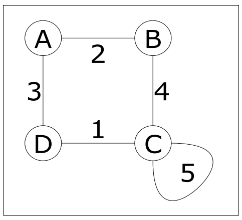

Abbildung 6: Beispiel: Induzierter Teilgraph

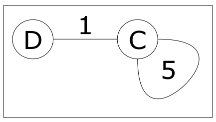

Abbildung 7: Beispiel: Koalition aus Agent D und C

9 Vgl. Wooldridge, MultiAgent Systems, 2009, S. 278

3.2.2 Darstellung von einfachen Spielen

Einfache Spiele haben natürliche Ergebnisse und nicht beliebige, wie bei Koalitionsspielen. Ein **Ja/Nein Wahlspiel** wird durch das Paar $Y=(Ag, W)$ gebildet, wobei Ag wieder eine endliche Menge von Agenten ist und $W \subseteq 2^{Ag}$ die Menge der gewinnenden Koalitionen.

Folgende Bedingungen sind für viele Szenarien geeignet:

- Die **Nichttrivialität** besagt, dass es Koalitionen gibt, die gewinnen, aber es gewinnen nicht alle: $\emptyset \subset W \subset 2^{Ag}$
- Die **Monotonie** beschreibt, dass wenn C gewinnt, dann gewinnen auch alle Obermengen von C: $C_1 \subseteq C_2 \wedge C_1 \in W \Rightarrow C_2 \in W$
- Die Bedingung der **Nullsumme** bedeutet, dass wenn eine Koalition C gewinnt, dann verlieren alle Agenten außerhalb von C. Man kann es sich so vorstellen, dass in einem Nullsummenspiel um einen konstanten Wert gespielt wird und eine Partei gewinnt diesen und die anderen nicht: $C \in W \Rightarrow Ag \setminus C \notin W$
- Leere Koalitionen verlieren: $\emptyset \notin W$
- Die große Koalition gewinnt: $Ag \in W$

Die letzten beiden Bedingungen implizieren die erste, aber nicht umgekehrt.

Wenn man ein einfaches Spiel Y naiv aufschreibt, landet man wieder bei einer in der Anzahl an Agenten exponentiellen Anzahl an Einträgen.

Die **gewichteten Wahlspiele** bieten da schon eine ansprechendere Darstellungsform, aber keine vollständige. Jeder Agent i aus Ag bekommt ein Gewicht w_i (wie viel Macht seine Stimme hat) und eine Koalition C gewinnt, wenn die Summe der Gewichte größer oder gleich einer definierter Gesamtquote q sind:

$$\nu(C)=\begin{cases} 1 & \text{wenn } \sum_{i \in C} w_i \geq q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gewichtete Wahlspiele mit $1, \ldots, n$ Spielern, den Gewichten $w_1, \ldots, w_n$ und der Gesamtquote q können in der generischen Form $\langle q; w_1, \ldots, w_n \rangle$ beschrieben werden.

Ein Beispiel hierfür ist eine absolute Mehrheitswahl, bei der jeder Spieler das Gewicht 1 hat und eine Koalition ab der Stimmenanzahl von mehr als 50% gewinnt.

Das Gewicht eines Spielers ist aber immer relativ zum Spiel zu sehen. Bei dem Spiel $\langle 10; 9, 9, 1 \rangle$ haben die ersten beiden Spieler ein sehr viel größeres Gewicht, aber keiner von beiden kann ohne einen anderen Spieler gewinnen.

Der Shapley-Wert berechnet in gewichteten Wahlspielen die Macht eines Spielers, den Entscheidungsprozess zu beeinflussen. Leider ist die Berechnung NP-schwer. Aber es kann in polynomialer Zeit bestimmt werden, ob der Kern nicht leer ist. Dazu muss ein Agent i gefunden werden, der in allen gewinnenden Koalitionen vorhanden ist. Um zu prüfen ob so ein Agent existiert, muss für die Koalition mit Agenten, die ein positives Gewicht haben, ohne Agent i, geprüft werden, dass die Koalition ohne i verliert und wenn i der Koalition hinzugefügt wird, diese gewinnt:

$$\sum_{j \in C \setminus \{i\}} w_i < q \;\wedge\; \sum_{j \in C \cup \{i\}} w_j \geq q$$

Eine Erweiterung zu den gewichteten Wahlspielen sind die ***k*-gewichteten Wahlspiele**. k steht hier für die Anzahl der einzelnen miteinander verbundenen gewichteten Spiele. Dadurch ist eine vollständige Darstellung von einfachen Spielen möglich. Außerdem kann jedes einfache Spiel auch als k-gewichtetes Wahlspiel dargestellt werden. Eine Koalition ist hier Gesamtgewinner, wenn sie alle Teilspiele gewinnt.

Ein Beispiel ist die Europäische Union. Ein neues Gesetz braucht nämlich die Mehrheit der Länder, die Mehrheit der Bevölkerung in der EU und die Mehrheit der EU Kommissare. Das sind drei Spiele mit eigenen Regeln und Stimmverteilungen.

3.2.3 Koalitionsspiele mit Zielen

Es gibt auch Koalitionsspiele, in denen es nicht darum geht einen möglichst hohen Nutzen zu erlangen, sondern um vorher definierte Ziele zu erreichen, wie zum Beispiel bei den **qualitativen Koalitionsspielen** (QCGs).[10]

QCGs werden durch ein n-Tupel $\Gamma_Q = (G, Ag, G_1, \ldots, G_n, V)$ beschrieben. Es gibt eine Menge von Zielen G, aus denen jeder Agent i aus Ag seine Ziele $G_i \subseteq G$ wählt, von denen er mindestens eines erreicht haben möchte, damit er zufrieden ist. Welches Ziel davon erreicht wird, ist ihm aber egal. Die Charakteristik $V: 2^{Ag} \rightarrow 2^{2^G}$ bestimmt für jede Koalition $C \subseteq Ag$ eine Menge von Wahlmöglichkeiten $V(C)$ (eine Menge von Zielen), die die verschiedenen Möglichkeiten zu kooperieren darstellen. Diese Wahlmöglichkeiten sind mit den Zielen verknüpft, die dadurch erreicht werden können.

Wenn die Ziele $G' \subseteq G$ erreicht werden, und $G_i \cap G' \neq \emptyset$ dann stellt G' Agenten i zufrieden. Eine Menge von Zielen G' ist „erreichbar" für eine Koalition C, wenn $G' \in V(C)$, also wenn G' eine der Auswahlmöglichkeiten von C ist. Eine Koalition C ist „erfolgreich", wenn es eine erreichbare Menge von Zielen gibt, sodass alle Agenten in C zufrieden gestellt werden können.

Die Charakteristik kann vollständig, aber nicht immer knapp, auf Basis aussagenlogischer Ausdrücke dargestellt werden. Die aussagenlogischen Formeln beschreiben Ziele und Agenten mit Wahrheitswerten.

Beispiel für das Ziel g_1: $g_1 \Leftrightarrow (1 \wedge (2 \vee 3))$

Das Ziel g_1 kann mit einer Koalition erzielt werden, in der Agent 1 und entweder 2 oder 3 ober beide Mitglieder sind.

---

10 Vgl. Dunne / Wooldridge: Qualitative Coalitional Games http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.117.4107&rep=rep1&type=pdf

4 Praxisbezug

Ich habe bereits in den einzelnen Kapiteln Praxisbezüge eingestreut, aber hier noch ein paar weitere:

- Wenn man Kreuzungen mit Ampeln als Agenten konstruiert, kann jeder Agent den Verkehrsdurchsatz an seiner Ampel optimieren. Um den Durchsatz noch weiter zu erhöhen ist es notwendig auf die Ampelschaltungen der nächsten Kreuzungen zu achten und die eigenen danach anzupassen oder die Agenten arbeiten zusammen, um gemeinsam einen hohen Durchsatz zu erzielen.
- In der Logistik arbeiten schon häufig Unternehmen zusammen, um ihre Touren und die Auslastung zu optimieren und auch um das Verkehrsaufkommen, vor allem in Innenstädten, zu reduzieren.[11]
- Ein gemeinsamer Einkauf für Unternehmen kann durch die größeren Einkaufsmengen einen niedrigeren Preis erzielen.

[11] Nabe-Speiche-System http://www.wirtschaftslexikon24.net/d/nabe-speiche-system/nabe-speiche-system.htm

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

Wiese, Harald: [Kooperative Spieltheorie], Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 2005, Internet http://books.google.de/books?id=n7kkI0ioTIMC&printsec=frontcover&dq=Kooperative+Spieltheorie&cd=1#v=onepage&q&f=false, Abruf 29.05.2010

Wooldridge, Michael: An Introduction to [MultiAgent Systems] - Second Edition, John Wiley & Sons, 2009

Quellen im Internet

Conitzer, Vincent, 2006: [Computing Slater Rankings] Using Similarities Among Candidates, Internet http://www.cs.duke.edu/~conitzer/slaterAAAI06.pdf, Stand 2006, Abruf 15.06.2010

Dunne, Paul / Wooldridge, Michael, 2004: Preferences in [Qualitative Coalitional Games], Internet http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.117.4107&rep=rep1&type=pdf, New York, Stand Juli 2004, Abruf 29.05.2010

Fatima, Shaheen S. / Wooldridge, Michael / Jennings, Nicholas R., 2008: A [Linear Approximation] Method for the Shapley Value, Internet http://eprints.ecs.soton.ac.uk/15802/1/aij08.pdf, Stand 20.05.2008, Abruf 23.05.2010

o.V., 2008: [Auctions (Revelation Principle)], Internet https://wiki.cc.gatech.edu/theory/index.php/Auctions, Stand 01.05.2008, Abruf 29.05.2010

o.V., o.J.: [Nabe-Speiche-System], Internet http://www.wirtschaftslexikon24.net/d/nabe-speiche-system/nabe-speiche-system.htm, Abruf 30.05.2010