

# ***Diskrete Mathematik***

Sebastian Iwanowski  
FH Wedel

Kap.6: Kombinatorik

## **Referenzen zum Nacharbeiten:**

Lang 5.1, 5.2, 7.1 (Bsp. 4)

Beutelspacher 4 (außer Fixpunkte von Permutationen)

Meinel 8

Hachenberger 4.1 - 4.5

# 6. Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahl der Elemente endlicher Strukturen.

## 6.1 Zählformeln für endliche Mengen

Bezeichnung der Anzahl der Elemente einer endlichen Menge  $M$ :  $|M|$ ,  $\#M$

**Zusammenhang zwischen den Elementzahlen von Schnittmengen, Vereinigungsmengen und den Einzelmengen:**

### *Siebformel*

$$\begin{aligned} \# (M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k) &= \# M_1 + \dots + \# M_k - \# (M_1 \cap M_2) - \# (M_1 \cap M_3) - \dots - \# (M_{k-1} \cap M_k) \\ &\quad + \# (M_1 \cap M_2 \cap M_3) + \dots + \# (M_{k-2} \cap M_{k-1} \cap M_k) - \dots \\ &\quad + (-1)^{k-1} \#(M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k) \end{aligned}$$

$$\# \left( \bigcup_{i=1}^k M_i \right) = \sum_{i=1}^k \# M_i - \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^k \# (M_{i_1} \cap M_{i_2}) + \dots + (-1)^{l-1} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_l=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_l}}^k \# \left( \bigcap_{j=1}^l M_{i_j} \right) + \dots + (-1)^{k-1} \# \left( \bigcap_{i=1}^k M_i \right)$$

# 6. Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahl der Elemente endlicher Strukturen.

## 6.1 Zählformeln für endliche Mengen

**Zusammenhang zwischen den Elementzahlen von Mengen und ihrem Kreuzprodukt:**

$$\# (M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k) = \# M_1 \cdot \dots \cdot \# M_k$$

**Anzahl der k-Tupel einer n-elementigen Menge:  $n^k$**

**Anzahl der möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge:  $n!$**

***(Anzahl der Permutationen)***

# 6. Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahl der Elemente endlicher Strukturen.

## 6.1 Zählformeln für endliche Mengen

**Zusammenhang zwischen der Elementzahl einer Menge und der Anzahl ihrer Teilmengen:**

$$\# P(M) = 2^{\#M}$$

**Zusammenhang zwischen der Elementzahl  $n$  einer Menge und der Anzahl ihrer  $k$ -elementigen Teilmengen:**

$$\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad (\text{Binomialkoeffizient})$$

# 6. Kombinatorik

Die Kombinatorik beschäftigt sich mit der Anzahl der Elemente endlicher Strukturen.

## 6.1 Zählformeln für endliche Mengen

**Zusammenhang zwischen Binomialkoeffizient und binomischer Formel:**

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot y^i$$

**Zusammenhang zwischen den Binomialkoeffizienten:**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**Pascalsches Dreieck: Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten**

Bilde für  $n = 0, 1, 2, \dots$  nacheinander die Reihe der Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$  :

Verwende für jedes  $n$  die Regel  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

und berechne die  $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}$  aus den  $\binom{n-1}{1}, \binom{n-1}{2}, \dots, \binom{n-1}{n-1}$  nach der rekursiven Formel

# 6. Kombinatorik

## 6.2 Permutationen

Eine n-Permutation ist eine bijektive Abbildung  $f$  von einer n-elementigen Menge in sich selbst:

$$f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \quad i = j \Leftrightarrow f(i) = f(j)$$

### Darstellungsweise von Permutationen:

**Permutationstabelle**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$       **Bsp.:**  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

**Anordnung**  $f(1) \quad f(2) \quad \dots \quad f(n)$       7 6 5 4 1 2 3

**Zyklendarstellung**  $(1 \ 7 \ 3 \ 5) (2 \ 6) (4) = (1 \ 7 \ 3 \ 5) (2 \ 6)$

Die Zerlegung in Zyklen ist nicht eindeutig, nur die in *disjunkte* Zyklen maximaler Länge, wobei die zyklische Umstellung eines Zyklus als gleich angesehen wird.

Ein Zyklus der Länge 2 heißt *Transposition*

# 6. Kombinatorik

## 6.2 Permutationen

### Hintereinanderschaltung (Komposition) von Permutationen:

$$(1\ 7\ 3\ 5)\ (2\ 6) \circ (1\ 3\ 5)\ (2\ 4\ 7\ 6) = (1\ 5\ 7\ 2\ 4\ 3)$$

- Die Komposition wird von *rechts nach links* ausgeführt.
- Das Operationssymbol  $\circ$  kann in der Zyklendarstellung weggelassen werden, da die Zerlegung in disjunkte Zyklen auch als Komposition aufgefasst werden kann.

# 6. Kombinatorik

## 6.2 Permutationen

### Zerlegung von Permutationen in Transpositionen:

Jede Permutation kann in eine Komposition von Transpositionen zerlegt werden:

$$(a_1 \dots a_n) = (a_1 a_n) (a_1 a_{n-1}) \dots (a_1 a_2)$$
$$(1 \ 7 \ 3 \ 5) (2 \ 6) = (1 \ 5) (1 \ 3) (1 \ 7) (2 \ 6)$$

- Diese Zerlegung ist nicht eindeutig, ebenfalls nicht die Anzahl von Transpositionen. Es gilt aber immer, dass Zerlegungen für dieselbe Permutation entweder *alle* eine gerade Anzahl oder *alle* eine ungerade Anzahl von Transpositionen haben.
- Gemäß ihrer Zerlegungseigenschaft in Transpositionen bezeichnet man eine *Permutation* als *gerade* oder *ungerade*.

# 6. Kombinatorik

## 6.2 Permutationen

### Die Permutationsgruppe $S_n$ :

- Die Menge aller  $n$ -Permutationen bildet mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe, die **symmetrische Gruppe  $S_n$** .
- Die symmetrische Gruppe ist nicht abelsch, d.h. das Kommutativgesetz gilt nicht.
- Die Menge der geraden Permutationen bildet eine Untergruppe von  $S_n$ . Sie heißt die **alternierende Gruppe  $A_n$** .