

## Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in Diskrete Mathematik (SS 2009)

Zeit: 90 Minuten

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (aber nicht erforderlich)

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein (Vorder- und Rückseite benutzen). Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Dieses Aufgabenblatt ist nicht abzugeben. **Daher werden Lösungen darauf nicht gewertet.**

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt Ihrer Lösungen zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE. Viel Erfolg !

### 1. Aufgabe (7 BE):

Gegeben seien die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen (inklusive 0):

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist Teiler von } 15\}$$

- a) Beschreiben Sie die Mengen  $A \cap B$ ,  $A \cup C$ ,  $A \cap C$  und  $B \cap C$  durch Elementaufzählung! (4 Mengen) (4 BE)
- b) Geben Sie die Wahrheitswerte der Aussagen i) – iii) an (mit Begründung): (3 BE)
- i)  $(A \cap B) \in (A \cup C)$
- ii)  $(B \cap C) \subseteq (A \cup C)$
- iii)  $(A \cap B) \subseteq C$

### 2. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie folgende Relation:  $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y \text{ ist eine gerade Zahl}\}$

- a) Entscheiden Sie, ob  $R$  eine Äquivalenzrelation ist und begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, geben Sie an, wie viele Äquivalenzklassen es gibt und beschreiben Sie diese in Worten!
- b) Entscheiden Sie, ob  $R$  eine Ordnungsrelation ist und begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, geben Sie das Hasse-Diagramm für die Zahlen 1 bis 10 an!
- c) Entscheiden Sie, ob  $R$  eine Funktion ist und begründen Sie Ihre Antwort. Falls ja, beschreiben Sie die Bildmenge in Worten!

### 3. Aufgabe (3 BE)

- a) Skizzieren Sie den Beweis dafür, dass die Menge  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  gleichmächtig der Menge  $\mathbb{N}$  ist! (2 BE)
- b) Kann man mit derselben Methode auch zeigen, dass die Menge  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  gleichmächtig der Menge  $\mathbb{Q}$  ist? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

#### 4. Aufgabe (6 BE)

- a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion folgenden Satz: Von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer mindestens eine gerade. (5 BE)
- b) Folgern Sie aus a) als Korollar: Zwei aufeinanderfolgende Zahlen können nicht beide Primzahlen sein. (1 BE)

#### 5. Aufgabe (5 BE)

- a) Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für die Gruppe  $(\mathbb{Z}_{12}^*, *)$  an! (2 BE)
- b) Ist die Gruppe isomorph zur Gruppe  $(\mathbb{Z}_4, +)$ ? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)
- c) Beantworten Sie die Frage aus b) für  $(\mathbb{Z}_4, *)$ ! (1 BE)

#### 6. Aufgabe (5 BE)

- a) Zeigen Sie, dass  $x^2 + 2x + 2$  ein irreduzibles Polynom für die Multiplikationstabelle von  $GF(9)$  ist! (2 BE)
- b) Betrachten Sie die Polynome  $x + 2$  und  $x + 1$  als Elemente von  $GF(9)$ : Berechnen Sie das Produkt dieser Polynome mit dem in a) angegebenen irreduziblen Polynom! (3 BE)

#### 7. Aufgabe (3 BE)

- a) Berechnen Sie die Komposition der Permutation  $(2\ 4\ 3)(4\ 5\ 1)!$  (gegeben in Zykelschreibweise, von rechts nach links) (1 BE)
- b) Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die Komposition nicht kommutativ ist! (1 BE)
- c) Stellen Sie das Ergebnis von a) als Komposition von Transpositionen dar. Handelt es sich um eine gerade oder eine ungerade Permutation? (1 BE)

#### 8. Aufgabe (7 BE)

- a) Zeichnen Sie einen minimalen spannenden Baum für den unten angegebenen Graphen! (2 BE)
- b) Ist der Graph planar (=plättbar)? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)
- c) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort! (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner) (2 BE)
- d) Hat der Graph einen Eulerweg? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

