

## Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (WS 2008/2009)

Zeit: 90 Minuten

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein (Vorder- und Rückseite benutzen). Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Dieses Aufgabenblatt ist nicht abzugeben. **Daher werden Lösungen darauf nicht gewertet.**

Vergessen Sie nicht, das offizielle Deckblatt Ihrer Lösungen zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 37 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 18,5 BE.

Viel Erfolg !

### 1. Aufgabe (6 BE):

Gegeben sei die Menge  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- Kann man die Menge  $\{(1,3); (3,1); (2,4); (4,2)\}$  zu einer bijektiven Funktion auf  $M$  ergänzen? Geben Sie als Antwort eine Lösung an bzw. begründen Sie, warum das nicht geht! (1 BE)
- Wie viele Elemente hat die Potenzmenge von  $M$ ? Geben Sie 3 verschiedene Elemente aus der Potenzmenge an! (2 BE)
- Wie viele Elemente hat die Schnittmenge von  $M$  mit ihrer Potenzmenge und wie viele die Vereinigungsmenge? Begründen Sie Ihre Antwort! (3 BE)

### 2. Aufgabe (6 BE)

Betrachten Sie die Menge  $M = \{\text{Mensch, Salat, Ziege, Wolf}\}$  und die Relation  $R$  auf  $M$  mit:

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow x \text{ (fr)isst } y$$

- Geben Sie die Relation  $R$  in Mengendarstellung explizit an! (1 BE)
- Ist  $R$  eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation oder eine Funktion? Fassen Sie hierfür die Relation  $R$  als Teilmenge von  $M \times M$  auf. Geben Sie für alle drei Eigenschaften eine Begründung an! (2 BE)
- Fügen Sie noch Elemente zu  $R$  hinzu (bei gleich bleibendem  $M$ ), sodass es sich jetzt um eine Ordnungsrelation handelt, und zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm! (3 BE)

### 3. Aufgabe (5 BE)

Gegeben sei die Boolesche Algebra  $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{N} : x \mid 42\}$  mit den Operationen:

i)  $\sim x = 42 \setminus x$

ii)  $p \oplus q = \text{ggT}(p,q)$

iii)  $p \odot q = \text{kgV}(p,q)$

- Geben Sie  $\mathcal{B}$  in Elementschreibweise an und benennen Sie das Nullelement und das Einselement! (2 BE)
- Wählen Sie 3 verschiedene Elemente  $p,q,r \in \mathcal{B}$  und zeigen Sie für diese Elemente, dass das Distributivgesetz sowohl für  $(p \oplus q) \odot r$  als auch für  $(p \odot q) \oplus r$  erfüllt ist (2 Aufgaben)! Geben Sie in Ihrer Rechnung auch die Zwischenwerte an! (3 BE)

#### 4. Aufgabe (5 BE):

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über  $n$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \exists k_n \in \mathbb{Z}: 7^n = 6 \cdot k_n + 1 \quad (7 \text{ hoch } n)$$

Hinweis: Versuchen Sie, im Beweis  $k_{n+1}$  aus  $k_n$  zu erzeugen!

#### 5. Aufgabe (4 BE):

- Geben Sie für das Element  $(1,2,0,0,2,1)$  eine geeignete endliche Additionsgruppe an, in der es enthalten ist! (1 BE)
- Bestimmen Sie in der in a) angegebenen Gruppe die Ordnung und das inverse Element von  $(1,2,0,0,2,1)$ . Beweisen Sie die Ordnung durch Zwischenrechnungen! (2 BE)
- Geben Sie an, ob die in a) angegebene Gruppe zu einem Körper erweitert werden kann und begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

#### 6. Aufgabe (6 BE):

- Berechnen Sie  $x^3 + 4x^2 + 2x + 1 \bmod x^3 + 4x + 2$  in  $\mathbb{Z}_5$  (2 BE)
- Wie viele Elemente hat der Körper, für den diese Berechnung für eine Elementmultiplikation relevant sein könnte? (1 BE)
- Geben Sie ein Kriterium an, das erfüllt sein muss, damit diese Berechnung tatsächlich für die Elementmultiplikation relevant ist, und weisen Sie das hier explizit nach! (3 BE)

#### 7. Aufgabe (5 BE)

Gegeben sei der untenstehende Graph.

- Bestimmen Sie den minimalen spannenden Baum mit dem Algorithmus von Kruskal: Zeichnen Sie den Baum auf Ihr Lösungsblatt, benennen Sie die verbundenen Ecken und geben Sie das Gesamtgewicht an! (3 BE)
- Untersuchen Sie, ob es einen Eulerkreis oder Eulerweg gibt und begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)
- Geben Sie einen Hamiltonkreis an! (richtige Reihenfolge der Ecken reicht aus) (1 BE)

