Fachhochschule Wedel 27.01.2009

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur und Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (WS 2008/2009)

Zeit: 90 Minuten

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein (Vorder- und Rückseite benutzen). Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Dieses Aufgabenblatt ist nicht abzugeben. **Daher werden Lösungen darauf nicht gewertet.**

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt Ihrer Lösungen zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (8 BE):

Gegeben sei als Grundmenge Ω die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen:

A = {x ist eine Zahl, die durch 4 teilbar ist} B = {x ist eine Zahl, die durch 9 teilbar ist}

C = {x ist eine Zahl, die durch 36 teilbar ist} D = {x ist eine negative Zahl, welche die Zahl 12 teilt}

a) Geben Sie für jede Menge A, B, C, D eine Darstellung an, die ganz auf Wörter der deutschen Sprache verzichtet. Verwenden Sie stattdessen eine Darstellung mit logischen und arithmetischen (+,-,•,/) Operatoren („|“ für „teilt“ ist auch zulässig), wenn die Menge **unendlich** ist (nur in diesem Fall!), und eine Aufzählung der Elemente, wenn die Menge **endlich** ist. (4 BE)

b) Geben Sie die folgenden Mengen als Aufzählung an, wenn die Menge endlich ist, bzw. charakterisieren Sie die Elemente in Worten, wenn die Menge unendlich ist. Falls eine der folgenden Mengen identisch mit einer der Mengen A, B, C oder D ist, dann muss das auch angegeben werden. (4 BE)

  $A \cap B$, $A \cup C$, $C \setminus B$, $D \cap C$

2. Aufgabe (7 BE)

Es sei D = {Ha, Hs, Iw, Ue} eine Menge ausgewählter Dozenten und V = {Analysis (A), Programmieren (P), Diskrete Mathematik (D), Informationstechnik (I)} eine Menge ausgewählter Vorlesungen. Jeder Dozent liest genau eine Vorlesung: Ha liest A, Hs liest P, Iw liest D, Ue liest I.

Sei $M = D \cup V$ und R = {(x,y): Dozent x liest Vorlesung y} eine Relation auf M.

a) Geben Sie <u>alle</u> Elemente der Relation R explizit an! (2 BE)

b) Ist R eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation oder eine Funktion? Fassen Sie hierfür die Relation R als Teilmenge von MxM auf. Geben Sie für alle drei Eigenschaften eine Begründung an! (3 BE)

c) Was ändert sich in b), wenn die Relation R als Teilmenge von DxV aufgefasst wird? (1 BE)

d) Geben Sie für b) und c) die Äquivalenzklassen, Hassediagramme und Bildmengen an, je nachdem, welche Eigenschaft erfüllt ist! (1 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n: $\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

4. Aufgabe (4 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 148555 und 278203 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

5. Aufgabe (3 BE)

Betrachten Sie die Gruppen $(\mathbb{Z}_6,+)$, $(\mathbb{Z}_6^*,*)$, $(\mathbb{Z}_3,+)$ und $(\mathbb{Z}_3\backslash\{0\},*)$. Es sind genau zwei dieser Gruppen isomorph: Welche? Geben Sie die Begründung an, warum das die einzigen sind und geben Sie den Isomorphismus an!

6. Aufgabe (4 BE)

a) Geben Sie ein irreduzibles Polynom für die Multiplikation in GF (8) an und weisen Sie die Irreduzibilität nach! (2 BE)

b) Berechnen Sie $x^2 \bullet x^2$ in GF (8) mit Hilfe des Polynoms von a)! (2 BE)

7. Aufgabe (3 BE)

Gegeben sei die Permutation (2 4 1) (3 7 6 8) (5 9 13 11 10) (12 14) in Zyklendarstellung:

a) Geben Sie diese Permutation als Permutationstabelle an! (2 BE)

b) Ist die Permutation gerade oder ungerade? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

8. Aufgabe (7 BE)

Gegeben sei der untenstehende Graph.

a) Gesucht sei der kürzeste Weg von A nach E mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra: Geben Sie den Baum an, der aus den Ecken besteht, zu denen der Algorithmus den kürzesten Weg ebenfalls ausgerechnet hat, wenn er den Weg nach E ausgerechnet hat. Geben Sie für diese Ecken die errechnete Weglänge von A an! (3 BE)

b) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort genau! (2 BE)

c) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)