Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (SS 2008)

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein. Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (9 BE):

Gegeben sei die Menge A = { 1, 2, 3 }:

a) Geben Sie die Potenzmenge Pot(A) von A an ! (1 BE)

b) Geben Sie die Menge A x A an ! (1 BE)

c) Gegeben sei die Menge M = { (1,2); (2,1); (3,3) }:
Falls es eine Beziehung zwischen M und Pot(A) oder A x A gibt, geben Sie diese an! (1 BE)

d) Beantworten Sie, ob es sich bei M um eine Funktion, eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation handelt (3 getrennte Antworten) und begründen Sie jede Ihrer Antworten! (3 BE)

e) Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation R auf A, welche das Paar (1,2) enthält und das Paar (1,3) nicht enthält: Geben Sie <u>alle</u> Elemente dieser Ordnungsrelation explizit an! (1,5 BE)

f) Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation R auf A, welche das Paar (1,2) enthält und das Paar (1,3) nicht enthält: Geben Sie <u>alle</u> Elemente dieser Äquivalenzrelation explizit an! (1,5 BE)

2. Aufgabe (3 BE)

Geben Sie eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller Quadratzahlen und der Menge der natürlichen Zahlen an! Was können Sie über die Mächtigkeit der beiden Mengen aussagen?

3. Aufgabe (5 BE)

Betrachten Sie die Menge der Booleschen Schaltfunktionen für n = 2:

$\mathscr{B} = \{f:\{0,1\}^2 \to \{0,1\}\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

i) $\sim f(x_1,x_2) = 1 - f(x_1,x_2)$

ii) $(f \oplus g)(x_1,x_2) = \max\{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

iii) $(f \bullet g)(x_1,x_2) = \min\{f(x_1,x_2), g(x_1,x_2)\}$

a) Geben Sie zwei beliebige, aber konkrete verschiedene Elemente f und g aus $\mathscr{B}$ an! (2 BE)

b) Geben Sie das Ergebnis von $\sim (f \oplus g)(1,0)$ für die von Ihnen in a) gewählten Elemente an! (1 BE)

c) Geben Sie für b) die deMorgansche Regel an und beweisen Sie deren Gültigkeit, indem Sie die Zwischenwerte angeben! (2 BE)

4. Aufgabe (3 BE)

Benutzen Sie als Definition der Fakultät folgende:

i) $0! = 1$

ii) $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Beweisen Sie mit einem geeigneten Verfahren, dass dann für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt: $n! = n \cdot (n-1)!$

5. Aufgabe (3 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 2128 und 3876 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

6. Aufgabe (6 BE)

Führen Sie die Berechnungen in GF(8) für die Beispiele a) – d) durch!

Die Benennung der Elemente von GF(8) sei folgende: $\{0,\ 1,\ x,\ x+1,\ x^2,\ x^2+1,\ x^2+x,\ x^2+x+1\}$

0	1	2	3	4	5	6	7

Nutzen Sie bei Bedarf das irreduzible Polynom x^3+x+1.

a) 2+3 b) 2*3 c) 6+5 d) 6*5

e) Zu welcher Gruppe ist die Multiplikationsgruppe von GF (8) isomorph?

7. Aufgabe (5 BE)

a) Berechnen Sie die Komposition der Permutationen (1 3 4) (1 2) !
(gegeben in Zyklenschreibweise) (1 BE)

b) Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die Komposition nicht kommutativ ist! (1 BE)

c) Handelt es sich beim Ergebnis von a) um eine gerade oder ungerade Permutation? (1 BE)

d) Geben Sie alle geraden Permutationen aus den Elementen 1, 2, 3 und 4 an! (2 BE)

8. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Gesucht sei der kürzeste Weg von A nach E mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra: Geben Sie die Reihenfolge der Ecken an, in welcher der Algorithmus den kürzeste Weg von A bestimmt, bis er den kürzesten Weg zur Ecke E bestimmt hat! Geben Sie für all diese Ecken die errechnete Weglänge an! Geben Sie an, zu welchen Ecken der Algorithmus den kürzesten Weg von A bei Erreichen von E noch nicht bestimmt hat! (4 BE)

b) Hat der Graph einen Euler- oder Hamiltonkreis? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! (2 BE)