Aufgaben zur Klausur und Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (SS 2008)

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein. Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 38 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 19 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (6 BE):

Gegeben sei als Grundmenge Ω die Menge {A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N} und die folgenden 4 Mengen:

M_1 = {A,N,N,A} M_2 = {N,A,B,E,L} M_3 = {K,A,B,E,L} M_4 = {J,A,G,D}

Bilden Sie die folgenden 5 Mengen:

$M_2 \setminus M_1$ $M_1 \setminus M_2$ $M_1 \cap M_3$ $M_2 \Delta M_3$ $\sim(M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4)$ (2 BE)

<u>Anm.:</u> Hierbei steht ~ für das Komplement (bzgl. Ω) und Δ für die symmetrische Differenz.

2. Aufgabe (8 BE)

Sei M = {1, 2, 3, 4} eine Menge und R = {(1,2); (2,1); (3,1); (4,4)} eine Relation.

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen i) – v) an, ob sie wahr ist, und begründen Sie kurz Ihre Antwort (ohne Begründung gibt es keinen Punkt): (5 BE)

   i) R ist eine Teilmenge von M x M

   ii) R ist eine Teilmenge der Potenzmenge von M

   iii) R ist eine Äquivalenzrelation auf M

   iv) R ist eine Ordnungsrelation auf M

   v) R ist eine Funktion

b) Geben Sie die Komposition R○R explizit an! (1 BE)

c) Wie viele Elemente hat die Komposition R○R? (1 BE)

d) Ist R○R eine Funktion ? (Begründung) (1 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n: $\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

4. Aufgabe (4 BE)

Durch welche Ziffern müssen die Buchstaben a und b ersetzt werden, damit die Zahl **19a9b** durch **45** teilbar ist?

Benutzen Sie ein Teilbarkeitsgesetz (geben Sie an, was das Gesetz aussagt) und geben Sie zwei verschiedene Lösungen an!

Hinweis: Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.

5. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie die Gruppe aller umkehrbaren Funktionen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit dem Operator $\circ$ (Komposition von Funktionen) und in dieser die spezielle Funktion f mit f(x) = 1-x:

a) Bilden Sie die Untergruppe U, die durch f erzeugt wird! (2 BE)
Hinweis: Benutzen Sie zur Beschreibung der anderen Funktionen nur die Angabe des Funktionswerts in Abhängigkeit von x, also z.B. für f die Kurzschreibweise 1-x.
U sieht dann so aus: {1-x, ... }.
Hier müssen Sie für ... die anderen Funktionen einsetzen, die durch f erzeugt werden.

b) Zu welcher zyklischen Gruppe ist U isomorph? Geben Sie den Isomorphismus explizit an! (2 BE)

6. Aufgabe (6 BE)

a) Arbeiten Sie für die Multiplikation in GF (9) mit dem Polynom p[x] = x^2+x+2:
Über welchem Körper muss dieses Polynom irreduzibel sein?
Weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach!
Könnte man auch das irreduzible Polynom x^2+1 nehmen ? (3 Aufgaben: 3 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (9) die Elemente x+1 und 2x+2 mit Hilfe des Polynoms p[x] aus a) (3 BE)

7. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Gesucht sei der kürzeste Weg von A nach E mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra: Geben Sie die Reihenfolge der Ecken an, in welcher der Algorithmus den kürzeste Weg von A bestimmt, bis er den kürzesten Weg zur Ecke E bestimmt hat! Geben Sie für all diese Ecken die errechnete Weglänge an! Geben Sie an, zu welchen Ecken der Algorithmus den kürzesten Weg von A bei Erreichen von E noch nicht bestimmt hat! (4 BE)

b) Hat der Graph einen Euler- oder Hamiltonkreis? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! (2 BE)