Fachhochschule Wedel 08.02.2006

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur in
Diskrete Mathematik (WS 2005 / 2006)

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein. Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 34 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 17 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (7 BE):

Gegeben sei die Buchstabenmenge $\mathscr{B}$ = {A, M, O}

a) Bilden Sie die Potenzmenge von $\mathscr{B}$! (1 BE)

b) Bilden Sie die Menge aller Paare von $\mathscr{B}$! (1 BE)

c) Fassen Sie $\mathscr{B}$ als Alphabet auf, aus dem man Wörter bilden kann:
Ein Wort ist eine geordnete Folge von Buchstaben aus einem Alphabet in einer fest gelegten Reihenfolge.
Die Elemente genau einer der beiden Lösungsmengen von a) oder b) können mit Wörtern identifiziert werden.

i) Geben Sie an, um welche Lösungsmenge es sich dabei handelt! (1 BE)
ii) Geben Sie an, warum die Elemente der in i) nicht ausgewählte Lösungsmenge <u>nicht</u> mit Wörtern identifiziert werden können! (1 BE)
iii) Geben Sie an, welche Art Wörter in der von Ihnen ausgewählten Lösungsmenge immer noch nicht enthalten sind! (1 BE)

d) Definieren Sie eine Relation ~ auf den Wörtern von $\mathscr{B}$ in Relation derart, dass
w1 ~ w2, genau dann wenn w1 mit demselben Anfangsbuchstaben anfängt wie w2:
Handelt es sich hierbei um eine Äqivalenz- oder um eine Ordnungsrelation? (jeweils mit Begründung, insgesamt also zwei Begründungen!) (2 BE)

2. Aufgabe (6 BE)

Definieren Sie für die Menge aller Teiler von 30 eine Boolesche Algebra:

a) Geben Sie die Menge explizit an! (1 BE)

b) Definieren Sie die benötigten Rechenoperationen ~, $\oplus$ und $\odot$! (2 BE)

c) Geben Sie das Nullelement und das Einselement an! (1 BE)

d) Demonstrieren Sie beide deMorganschen Regeln mit den Elementen 5 und 10 ! (2 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n für beliebige $q \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$: $$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

4. Aufgabe (7 BE)

a) Geben Sie alle Elemente von $(\mathbb{Z}_2)^4$ explizit an und geben Sie zu jedem Element seine Ordnung bezüglich der additiven Gruppe an! (2 BE)

b) Geben Sie alle Elemente von $(\mathbb{Z}_4)^2$ explizit an und geben Sie zu jedem Element seine Ordnung bezüglich der additiven Gruppe an! (2 BE)

c) Betrachten Sie eine der Mengen von a) oder b) als Grundmenge von GF(16) (welche?): Nummerieren Sie die Elemente dieser Menge mit natürlichen Zahlen, wobei das Nullelement mit 0 nummeriert werden soll, und multiplizieren Sie die Elemente 5 und 7 in der von Ihnen angegebenen Nummerierung! (3 BE)

5. Aufgabe (4 BE)

a) Berechnen Sie die Komposition der Permutationen (1 3 4 2) (2 4 1 3) ! (gegeben in Zyklenschreibweise) (1 BE)

b) Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die Komposition nicht kommutativ ist! (1 BE)

c) Stellen Sie das Ergebnis von a) als Komposition von Transpositionen dar. Handelt es sich um eine gerade oder eine ungerade Permutation? (1 BE)

d) Wieviele gerade Permutationen können Sie mit den Elementen 1,2,3,4 bilden? (mit Begründung!) (1 BE)

6. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph. Hierbei bezeichnen die Buchstaben die Ecken und die Ziffern die Kanten. Die Kantenlänge sei gleich ihrer Ziffer.

a) Ist der Graph planar? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

b) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

c) Geben Sie einen minimal spannenden Baum an! (1 BE)

d) Geben Sie das Gerüst an, das entsteht, wenn der kürzeste Weg von A nach F mit dem Algorithmus von Dijkstra berechnet wird!
Geben Sie die Reihenfolge der anderen Ecken V an, in der der Algorithmus den kürzesten Weg von A zu V endgültig bestimmt, bevor er F erreicht, und geben Sie an, zu welchen Ecken beim Erreichen von F der kürzeste Weg noch nicht bestimmt ist! (3 BE)