Fachhochschule Wedel 16.01.2006

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (WS 2005 / 2006)

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt auszufüllen und zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 40 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 20 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (8 BE):

Gegeben sei die Menge M = { a, b, c }:

a) Geben Sie die Potenzmenge von M an ! (1 BE)

b) Geben Sie die Menge M x M an ! (1 BE)

c) Betrachten Sie die Relation { (a,b); (b,a); (c,c) }:
Beantworten Sie, ob es sich um eine Funktion, eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation handelt (3 getrennte Antworten) und begründen Sie jede Ihrer Antworten! (3 BE)

d) Konstruieren Sie eine totale Ordnungsrelation auf M, welche das Paar (a,b) enthält und das Paar (a,c) nicht enthält: Geben Sie <u>alle</u> Elemente dieser Ordnungsrelation explizit an! (1,5 BE)

e) Konstruieren Sie eine Äquivalenzrelation auf M, welche das Paar (a,b) enthält und das Paar (a,c) nicht enthält: Geben Sie <u>alle</u> Elemente dieser Äquivalenzrelation explizit an! (1,5 BE)

2. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie die Schaltfunktionen-Algebra $\{ f: \{0,1\}^2 \to \{0,1\} \}$

mit $(f \oplus g)(x,y) = \max \{ f(x,y); g(x,y)\}$ und $(f \odot g)(x,y) = \min \{ f(x,y); g(x,y)\}$ und $\sim f(x,y) = 1 - f(x,y)$

Gegeben seien die beiden konkreten Funktionen f_1 und f_2 mit

$f_1(0,0) = 1$; $f_1(0,1) = 1$; $f_1(1,0) = 0$; $f_1(1,1) = 1$ und

$f_2(0,0) = 1$; $f_2(0,1) = 0$; $f_2(1,0) = 1$; $f_2(1,1) = 0$

a) Geben Sie die Funktion $f_3 = \sim f_1 \oplus \sim f_2$ an! (2 BE)

b) Demonstrieren Sie die Gültigkeit der deMorganschen Regel am Beispiel von a)! (2 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Beweisen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen gleichmächtig der Menge der natürlichen Zahlen ist!

4. Aufgabe (4 BE):

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n: $\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

5. Aufgabe (9 BE):

Gegeben sei n = q · m + r für n,q,m,r $\in \mathbb{N}$:

a) Zeigen Sie: (k | n) ∧ (k | m) ⇒ (k | r) (2 BE)

b) Zeigen Sie: (k | m) ∧ (k | r) ⇒ (k | n) (2 BE)

c) Verwenden Sie a) und b), um zu zeigen: ggT (n,m) = ggT (m,r) (2 BE)

d) Verwenden Sie c) und die Eigenschaft $\forall$ n,m $\in \mathbb{N}$ $\exists$ q,r $\in \mathbb{N}$: (n = q · m + r) ∧ (r < m)

für ein Verfahren zur Bestimmung von ggT (17700, 8378) ! (3 BE)

6. Aufgabe (7 BE)

Betrachten Sie die Gruppe (G,+) mit G = { a, b, c, d } und folgender Verknüpfungstafel:

+	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

a) Geben Sie das neutrale Element an und für jedes Element sein Inverses ! (2 BE)

b) Bestimmen Sie für jedes Element seine Ordnung ! (2 BE)

c) Begründen Sie, warum man G mit einer multiplikativen Gruppe versehen kann, sodass (G,+,·) ein Körper ist! (3 BE)
(Hinweis: Es ist zulässig, aber nicht notwendig, als Begründung die komplette Multiplikationstafel anzugeben)

7. Aufgabe (4 BE)

Betrachten Sie die Permutation 1 7 3 5 6 4 2 (in Anordnungsschreibweise):

a) Schreiben Sie die Permutation in Zyklenschreibweise auf! (1 BE)

b) Geben Sie die Zerlegung in Transpositionen an! (1 BE)

c) Ist die Permutation gerade oder ungerade? (1 BE)

d) Verknüpfen Sie die Permutation mit sich selbst! (1 BE)