Fachhochschule Wedel 02.03.2006

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in

***Diskrete Mathematik* (WS 2005 / 2006)**

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: **keine**

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 42 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 21 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (8 BE):

Gegeben seien die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen:

$A = \{x \mid x \text{ ist ein Vielfaches von } 4\}$

$B = \{x \mid x \text{ ist ein Teiler von } 100\}$

$C = \{x \mid x \text{ ist eine Primzahl}\}$

a) Beschreiben Sie die Mengen $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap C$ und $A \cap B \cap C$ durch Elementaufzählung! (4 Mengen) (3 BE)

b) Geben Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen an (mit Begründung): (5 BE)

i) $(A \cup B) \subseteq (A \cup C)$

ii) $(B \cap C) \subseteq A$

iii) $(A \cap C) \in B$

2. Aufgabe (7 BE)

Betrachten Sie Menge

M = {Wedel, Hamburg, Schleswig-Holstein, Hannover, Niedersachsen, Kiel}

und die Relation ~ auf M mit:

x ~ y ⇔ x liegt in Bundesland y oder
x enthält als Stadt y oder
x liegt im selben Bundesland wie y oder
x enthält dieselben Städte wie y

a) Definiert ~ eine Äquivalenz- oder eine Ordnungsrelation ? Begründen Sie Ihre Entscheidung! (Begründung nur für *einen* Relationstyp erforderlich) (4 BE)

b) Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für M und ~ oder geben Sie die Äquivalenzklassen an! (je nachdem, ob es sich um eine Ordnungs- oder Äquivalenzrelation handelt) (3 BE)

3. Aufgabe (7 BE):

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n:

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \exists k_n: 7^n = 6 \cdot k_n + 1$ (7 hoch n)

Hinweis: Versuchen Sie, im Beweis k_{n+1} aus k_n zu erzeugen!

4. Aufgabe (7 BE):

a) Stellen Sie eine beliebige natürliche Zahl n als Summe von Zehnerpotenzen dar. Definieren Sie dann als Zahl b die größtmögliche Teilsumme, die auf jeden Fall durch 2 teilbar ist, unabhängig vom Wert von n (mit Begründung!). (3 BE)

b) Benutzen Sie a) und Ihnen bekannte Teilbarkeitsregeln (bitte angeben!), um zu zeigen:

n ist durch 2 teilbar $\Leftrightarrow$ die letzte Dezimalstelle von n ist durch 2 teilbar

Hinweis: Es sind zwei Richtungen zu zeigen. (4 BE)

5. Aufgabe (8 BE)

Betrachten Sie die Struktur (G,·) mit G = { a, b, c, d } und folgender Verknüpfungstafel:

·	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c		
d	a	d		

a) Begründen Sie, warum Sie diese Verknüpfungstafel nicht so ergänzen können, dass die Struktur (G,·) eine Gruppe ist! (1 BE)

b) Ergänzen Sie die Verknüpfungstafel so, dass für eine Teilmenge G' ⊂ G die Struktur (G',·) eine Gruppe ist! Geben Sie die Menge G' explizit an und benennen Sie das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung „·“ ! (3 BE)

c) Definieren Sie eine weitere Verknüpfung „+“ und geben Sie die Verknüpfungstafel dafür an, sodass (G,+,·) mit der Ergänzung in b) ein Körper ist! Geben Sie an, zu welcher Gruppe (G,+) isomorph ist!
(Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, welches das Nullelement und welches das Einselement ist!) (4 BE)

6. Aufgabe (5 BE)

Berechnen Sie 101^5 (101 hoch 5) durch folgende Darstellung: 101 = 100 + 1

Geben Sie die Zwischenschritte an!