Der Satz von Menger

und seine Anwendung auf Algorithmen zur Berechnung von Ecken und Kanten

fhwedel
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Problemstellung

- Kommunikationsnetzwerke: durch Datenübertragungswege realisierter Verband mehrerer Rechner
- Die Verletzlichkeit der Netze ist durch die Anzahl von Leitungen und Rechnern gekennzeichnet, die ausfallen müssen, um die Kommunikation zu stören.

Inhalt

- Einführung
- Der Satz von Menger
- Eckenzusammenhangszahl
- Kantenzusammenhangszahl

Inhalt

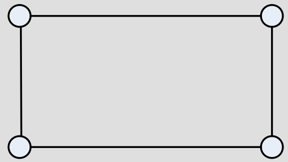
- Einführung
  - Mengenlehre
  - Graphentheorie
  - Von Graphen zu Netzwerke
  - Verwendete Begriffe und Bedingungen
- Der Satz von Menger
- Eckenzusammenhangszahl
- Kantenzusammenhangszahl

Mengentheorie

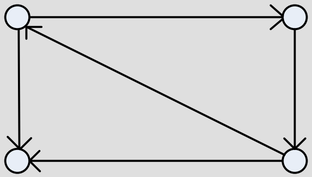
- Teilmenge:
  - $B \subseteq A$
- Echte Teilmenge:
  - $B \subset A$
- Schnittmenge:
  - $A \cap B$
- Vereinigungsmenge:
  - $B \cup A$
- Komplement:
  - $A - \overline{A}$
- Differenz:
  - $A \setminus B$

Graphentheorie

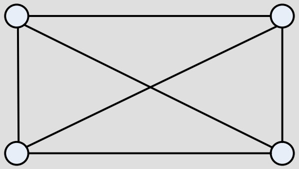
- Ungerichteter Graph
  - Ungeordnete Paare von Ecken und Kanten



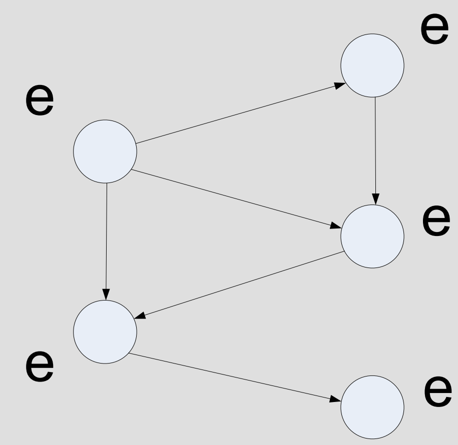
- Gerichteter Graph
  - Kanten sind geordnet mit Anfang und Ende



- Zusammenhängender Graph
  - Es gibt für jedes Eckenpaar einen Weg
- Vollständig zusammenhängender Graph
  - Jedes Eckenpaar ist durch eine Kante miteinander verbunden



Graphentheorie

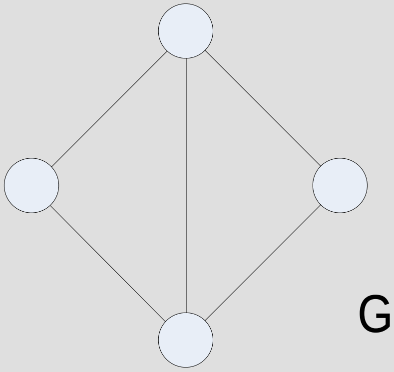


- In gerichtete Graphen:
  - $g^+(e)$ Aussengrad
  - $g^-(e)$ Innengrad
  - $g^+(e) = g^-(e) = 0$ isolierte Ecke
  - Bsp.: $g^+(e_3) = 2$, $g^-(e_3) = 1$

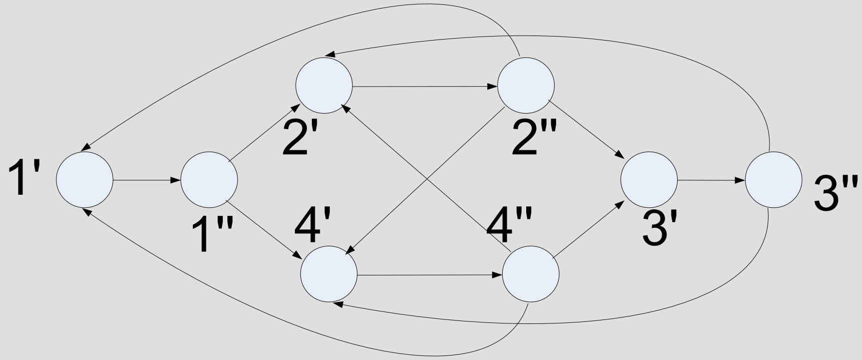
- Wege in Graphen
  - Eine Folge von Kanten ist ein Kantenzug
  - Kantenzug = Weg, wenn alle Kanten verschieden sind
  - Bsp.: W = $(e_2,e_3), (e_3,e_4), (e_4, e_5)$

Konstruktion eines Netzwerkes

- Für jede Ecke im Graphen G
  - zwei Ecken e‘ und e“ im Netzwerk N mit der Kante (e‘,e“)
- Für jede Kante (e,w) in G
  - enthält N zwei gerichtete Kanten (e“, w‘) und (w“,e‘)
- Kapazität aller Kanten ist 1
- N enthält 2n Ecken und 2m + n Kanten



Graph G



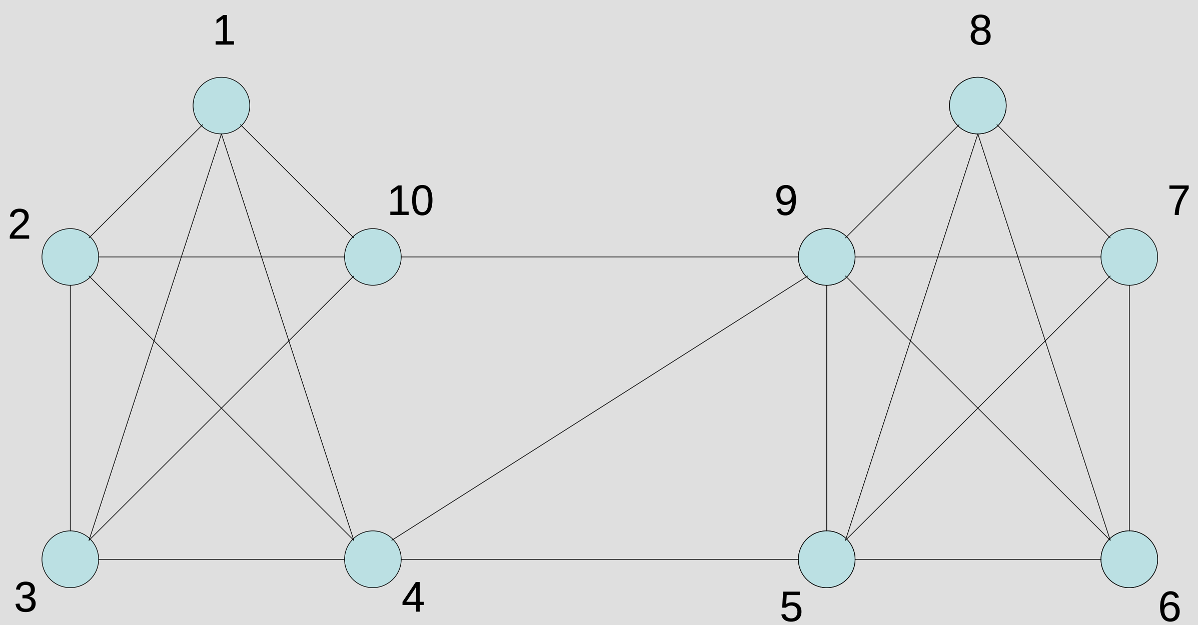
Netzwerk N

Inhalt

- Einführung
- Der Satz von Menger
  - Begriffe
  - Definition
  - Beweis
- Eckenzusammenhangszahl
- Kantenzusammenhangszahl

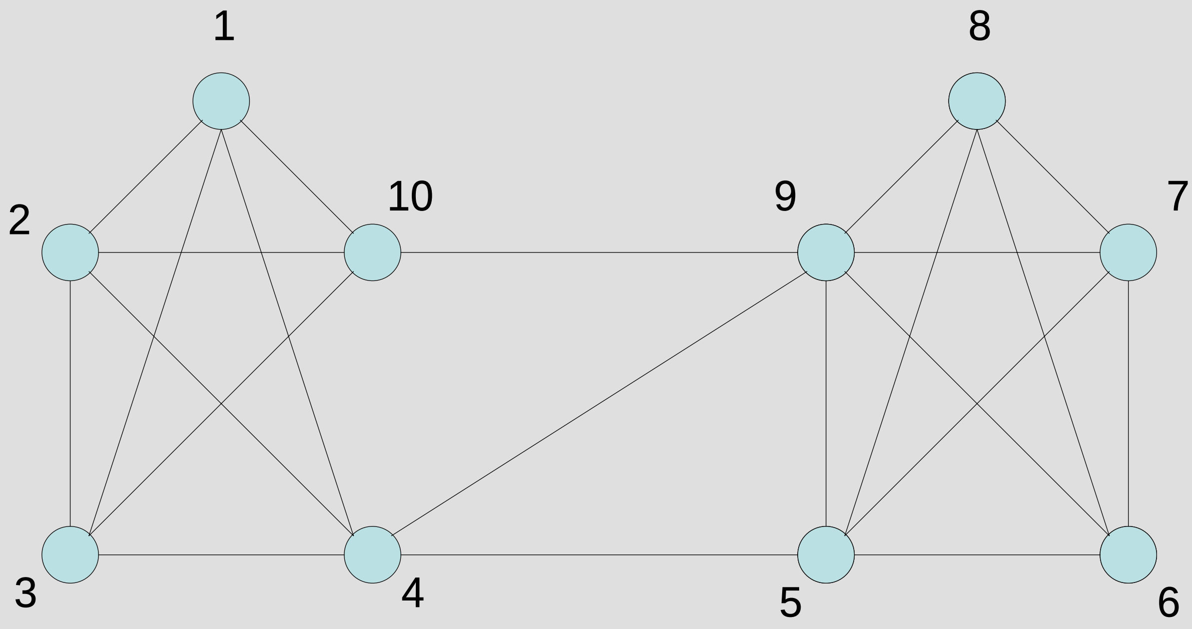
Begriffe

- a und b sind nicht benachbarte Ecken (a≁b)
- T = Trennende Eckenmenge für zwei Ecken



Begriffe

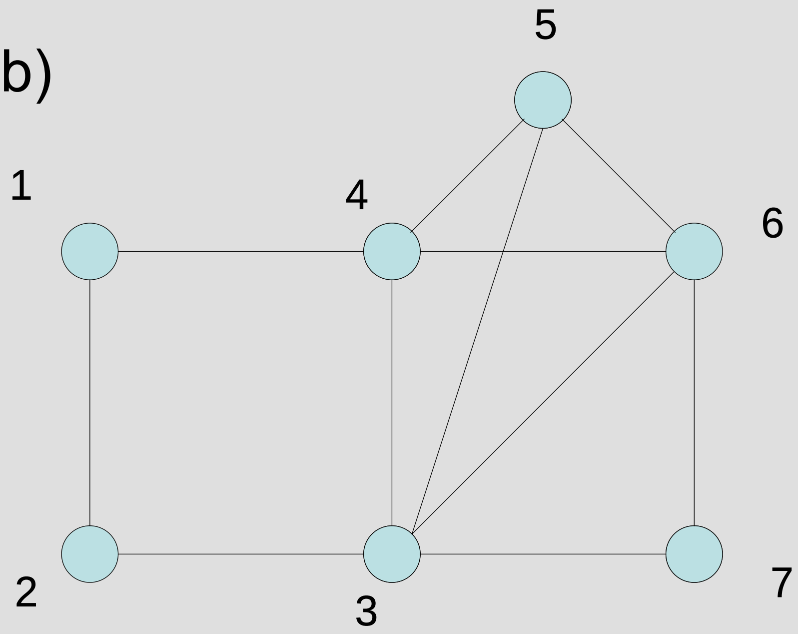
- $Z^e(a,b)$ ist die minimale Anzahl von Ecken einer trennenden Eckenmenge
- $Z^e(a,b) = \min \{|T| \mid \text{ist trennende Eckenmenge für } a,b\}$
- $Z^e(2,9) = 2$



Begriffe

- $W^e(a,b)$ ist die maximale Anzahl von paarweise eckendisjunkten Wegen von a nach b

  → zwei Wege haben außer a und b keine Ecken gemeinsam
- Jeder Weg von a nach b verwendet mindestens eine Ecke aus T
- D.h.: $Z^e(a,b) \geq |T| \geq W^e(a,b)$



Satz von Menger

Es seien a und b Ecken eines ungerichteten Graphen mit $a \neq b$.

Dann gilt:

$$Z^e(a,b) = W^e(a,b)$$

Beweis

- Konstruktion eines 0-1-Netzwerkes
  - $W^e(a,b)$ in G = min $W^e(a'',b')$ in N
  - $Z^e(a,b) = \min Z^e_N(a,b)$

  - Aus einer Ecke in G wird eine Kante in N

  → aus a werden die Ecken a' und a'' mit der Kante (a', a'')

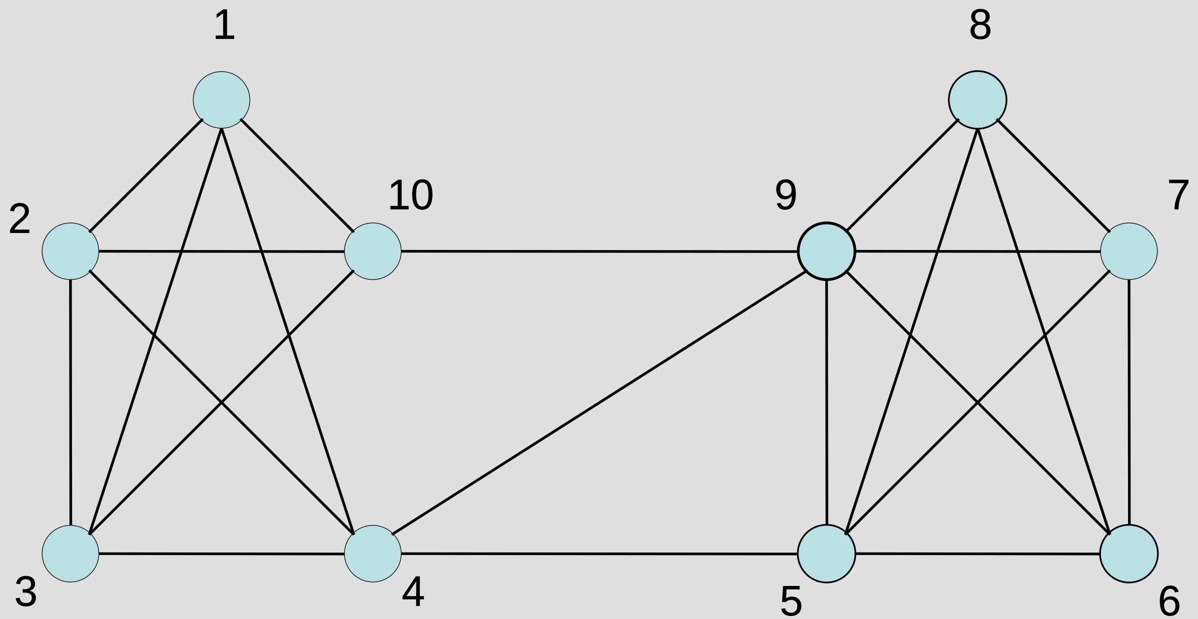
  → $a \in X$ und $b \in$ von $\overline{X}$

- Der Wert des Flusses ist höchstens so groß wie $W^e(a,b)$

Beweis

- $|f|$ eckendisjunkte Wege von a“ nach b‘
- Alle Kanten haben die Kapazität 1
- Keine Ecke kann auf zwei Wegen liegen

→ $W^e(a,b) \geq |f|$



Beweis

- Jeder Schnitt $(X,\bar{X})$ ist eine a und b trennende Kantenmenge
- Jeder Weg von a nach b muss also über eine Kante aus $(X,\bar{X})$ führen
- Der Wert von $Z^e(a,b)$ ist kleiner oder gleich einer trennenden Menge

Beweis

- Dies gilt auch für den Schnitt $(X,\overline{X})$

$$\rightarrow |Z^e(a,b)| \leq |(X,\overline{X})|$$

- Im Netzwerk haben alle Kanten die Kapazität 1

$$\rightarrow K(X,\overline{X}) = |(X,\overline{X})|$$

- Zusammen folgt:

$$\rightarrow |Z^e(a,b)| \leq K|(X,\overline{X})|$$

Beweis

Daraus folgt:

$$|f| \leq |W^e(a,b)| \leq |Z^e(a,b)| \leq k\,(X,\overline{X})$$

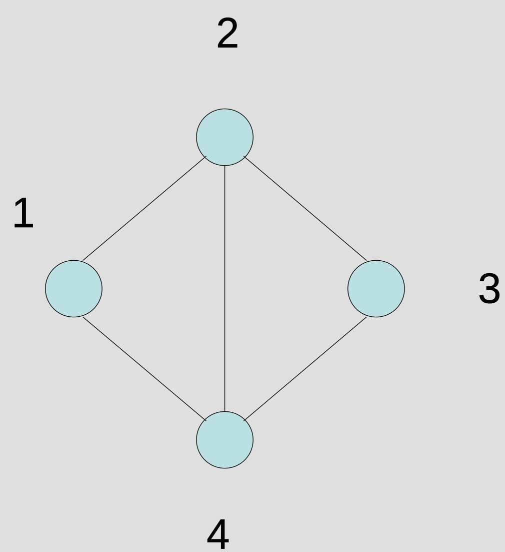
- f ist der maximale Fluss im Netzwerk
- $(X,\overline{X})$ ist der minimale Schnitt im Netzwerk
- Ford und Fulkerson: Wert des Flusses ist durch die Kapazität begrenzt → es gilt:

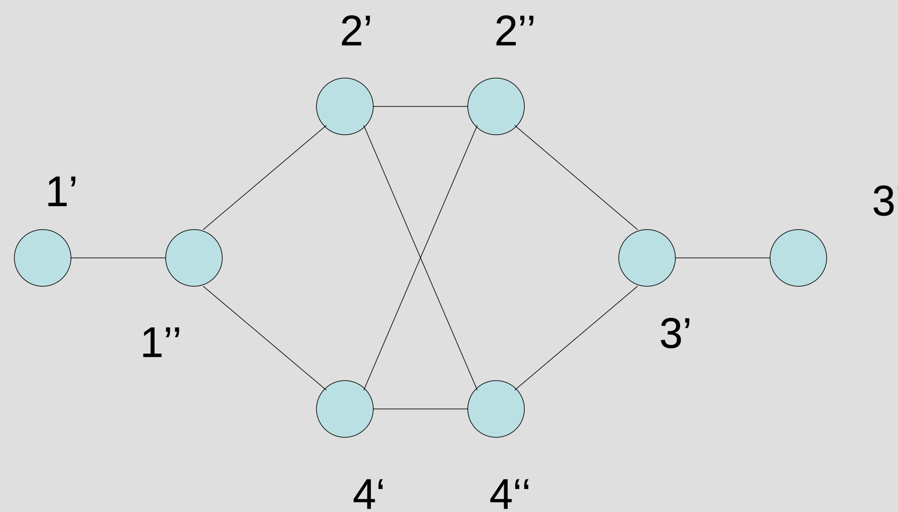
$$|f| = k(X,\overline{X})$$

Gilt für die gesamte Gleichung:

$$|f| = |W^e(a,b)| = |Z^e(a,b)| = k\,|(X,\overline{X})|$$

Beispiel





- $|f| = 2$
- |We(a“,b‘)| = 2
- |Ze(a“,b)‘| = 2
- k $|(X,\overline{X})| = 2$

Inhalt

- Einführung
- Der Satz von Menger
- Eckenzusammenhangszahl
  - Definition
  - Lemma
  - Algorithmus
- Kantenzusammenhangszahl

Definition

- $Z^e(G)$ ist die Eckenzusammenhangszahl
- Die Eckenzusammenhangszahl $Z^e(G)$ eines Graphen ist die Mindestanzahl von Ecken, die man entfernen muss, um einen nicht zusammenhängenden Graphen zu erhalten

Definition

Definition:

- Falls G vollständig ist, so st $Z^e(G) = n-1$
- Sonst: $Z^e(G) = \min \{Z^e(a,b) \mid$ a,b Ecken von G mit $a \sim b\}$
- Damit auch:

$$Z^e(G) = \min \{ |T| \mid T \subseteq E, G_{(E \setminus T)} \text{ ist nicht zusammenhängend} \}$$

Nach Menger gilt (unvollständiger Graph):

$$Z^e(G) = \min \{ W^e(a,b) \mid a, b \text{ Ecken aus } G\}$$

Lemma

Satz von Whitney:

- Ein Graph ist genau dann ***z***-fach zusammenhängend, wenn es jeweils für zwei Ecken **a** und **b** mindestens ***z*** eckendisjunkte Wege von a nach b gibt.

$$Z^e(G) \geq \boldsymbol{z}$$

Algorithmus

- Funktion `zusammenhangszahl` bestimmt die Zusammenhangszahl eines ungerichteten Graphen G
- Es wird das zugehörige Netzwerk ermittelt und der maximale Fluss auf dem Netzwerk

Algorithmus

Ablauf

- Ecken werden in einer bestimmten Reihenfolge betrachtet
- Für jede Ecke i wird $Z^e(i,j)$ ermittelt ($j \geq i$ und $i \nsim j$)
- Es gilt immer $Z^e(G) \geq \boldsymbol{z}$

Algorithmus

```
function zusammenhangszahl (G : Graph) : Integer;
var
   N : 0-1-Netzwerk
   z, i, j : Integer;

begin
   N := netzwerk(G)
   z := n - 1;
   i := 0;

   while i <= z do begin
      i := i + 1;
      for j := i 1 to n do
         if es existiert keine Kante von i nach j then
            z := min{z, maxfluß(N,i,j)};
   end;
   zusammenhangszahl := z;
end
```

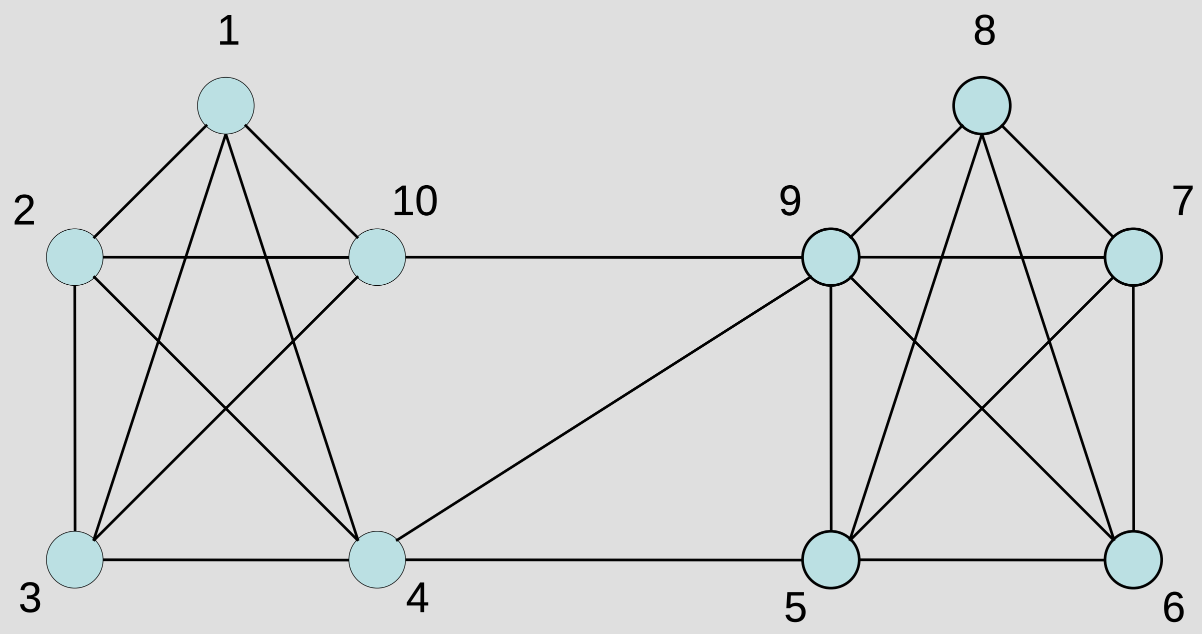
Netzwerk(G): Bestimmt das Netzwerk von G

maxfluß(N,i,j): Bestimmt den Wert des maximalen Flusses auf N von Quelle i'' nach j'

Beispiel

1. $Z^e(1,j)$ für j = 5,..,9
2. ***z*** = 2
3. $Z^e(2,j)$ für j = 5,..,9
4. ***z*** = 2

- Anschließend ist i = 3 und ***z*** = 2
- While-Schleife wird verlassen und $Z^e(G) = 2$



Erweiterte Suche

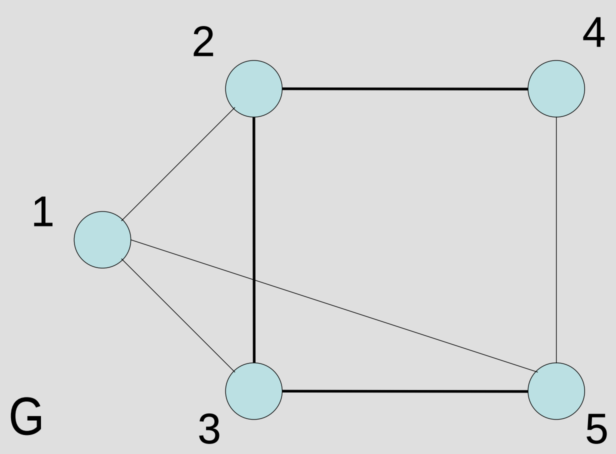
- Interesse: liegt die Zusammenhangszahl unter einem bestimmten Wert
- Dazu wird eine zusätzliche Ecke s und dazugehörige Kanten eingeführt
- ***l*** ist die Anzahl der eingeführten Kanten

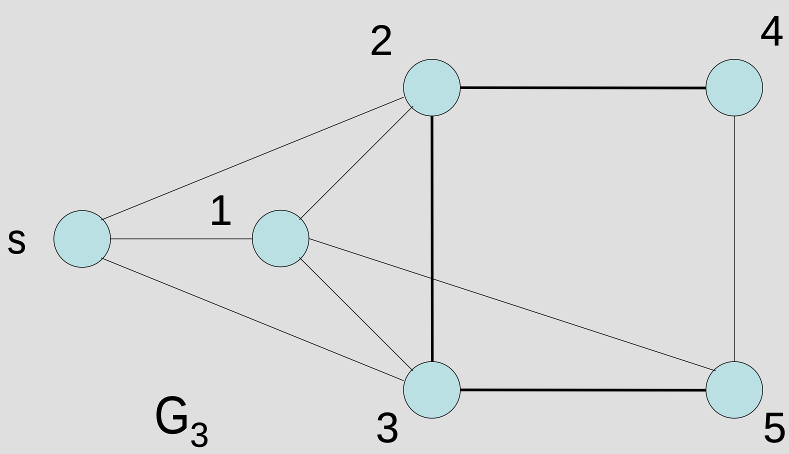
Erweiterte Suche

- $W^e(1,2) \geq 3$ in G
- $W^e(1,3) \geq 3$ in G
- $W^e(2,3) \geq 3$ in G
- $W^e(s,4) \geq 3$ in G_3
- $W^e(s,5) < 3$ in G_4

- ***z*** = 3

→ $Z^e(G) < 3$





Inhalt

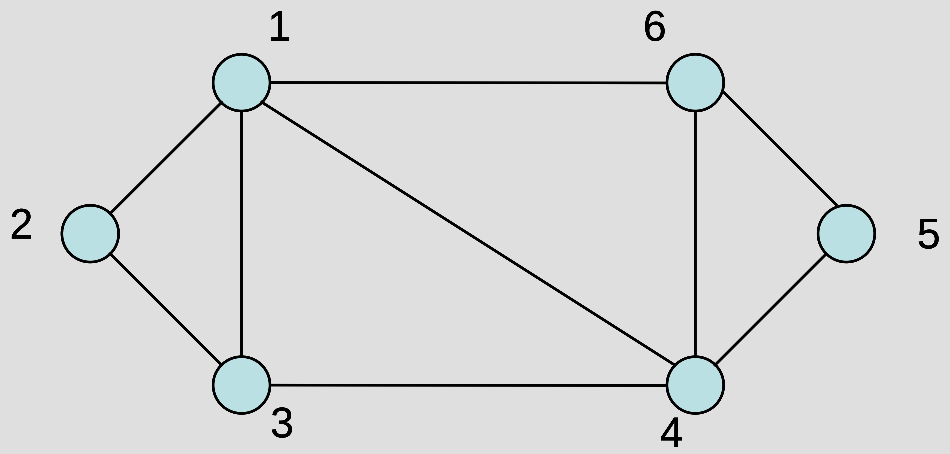
- Einführung
- Der Satz von Menger
- Eckenzusammenhangszahl
- Kantenzusammenhangszahl
  - Begriffe
  - Definition
  - Bestimmung von $Z^k(G)$

Begriffe

- a und b sind nicht benachbarte Ecken (a~b)
- T = Trennende Kantenmenge für zwei Ecken
- $Z^k(a,b)$ ist die minimale Anzahl von Kanten einer trennenden Kantenmenge
  - $Z^k(a,b) = \min \{|T| \mid$ ist trennende Kantenmenge für a,b$\}$
- $W^k(a,b)$ ist die maximale Anzahl von paarweise kantendisjunkten Wegen von a nach b

Beispiel

- Für die Ecken 1 und 4 ist T = {(3,4),(1,4),(1,6)}
- Für die Ecken 6 und 5 ist $Z^k(5,6) = 2$



Definition

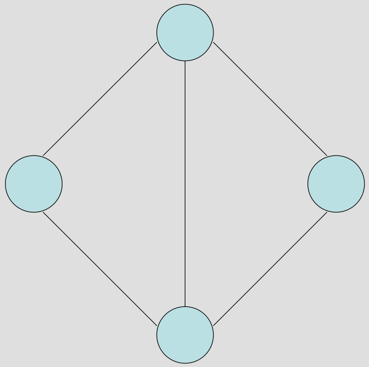
$Z^k(G)$ = Kantenzusammenhangszahl

Die Kantenzusammenhangszahl eines Graphen $Z^k(G)$ ist die Mindestanzahl von Kanten, die entfernt werden müssen, um einen nichtzusammenhängenden Graphen zu erhalten

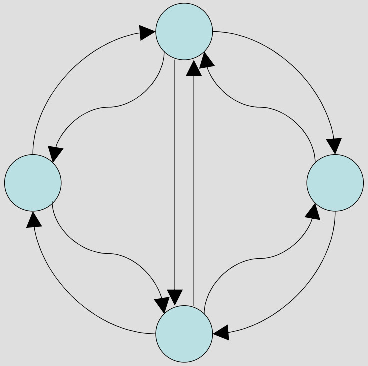
Bestimmung von $Z^k(G)$

- Aus einem Graph G wird ein symmetrischen Netzwerk G_S
  - G_S hat die gleiche Kantenmenge wie G
  - Jeder Kante (u,v) in G → (u,v) und (v,u) in G_S
  - Kante hat die Kapazität 1

G



G_S



Bestimmung von $Z^k(G)$

- Beziehung zwischen $W^k(a,b)$ und dem maximalen Fluss auf $G_{S:}$

$$|f| = W^k(a,b)$$

- Ausgehend davon ist der Satz von Menger analog für Kanten bewiesen werden

$$W^k(a,b) = Z^k(a,b)$$

Bestimmung von $Z^k(G)$

Satz von Whitney:

- Es sei G ein ungerichteter Graph. Genau dann ist $Z^k(G) \geq \boldsymbol{l}$, wenn je zwei Ecken durch mindestens ***l*** kantendisjunkte Wege verbunden sind.

Bestimmung von $Z^k(G)$

- Es sei G ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit Eckenmenge E.
- Ist a eine beliebige Ecke von G, so gilt:

$$Z^k(G) = \min \{Z^k(a,b) \mid b \in E,\ b \notin a\}$$

Bestimmung von $Z^k(G)$

- e,w sind Ecken von G mit $Z^k(e,w) = Z^k(G)$
- T ist trennende Kantenmenge für G
- Entferne T aus G → Resultat G' ist nicht zusammenhängend
- Wähle a und b so, dass sie in verschiedenen Zusammenhangskomponenten sind

$$Z^k(G) = |T| = Z^k(a,b)$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!