Grundlagen der Programmierung

Vorlesung 3 vom 28.10.2004

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Grundlagen der Programmierung

1. Einführung
   - Grundlegende Eigenschaften von Algorithmen und Programmen
2. Logik
   - ➔ Aussagenlogik
   - Prädikatenlogik
3. Programmentwicklung und –verifikation
   - Grundlagen der Programmverifikation
   - Verbundanweisungen
   - Verzweigungen
   - Schleifen
   - Modularisierung
   - Rekursion
4. Entwurf und Analyse von Algorithmen
   - Klassifikation von Algorithmen
   - Programmierung von Algorithmen
   - Bewertung von Algorithmen

Aussagenlogische Formeln

- **Eine aussagenlogische Formel ist eine Verknüpfung von endlich vielen Literalen mit logischen Operatoren.**

- **Eine Belegung einer Formel ist eine Zuweisung von Wahrheitswerten an die Literale derart, dass dieselben Literale immer denselben Wahrheitswert erhalten.**

  Die Formel als ganze bekommt durch die Belegung ebenfalls einen Wahrheitswert.

Aussagenlogische Formeln

- **Eine Formel heißt erfüllbar, wenn es eine Belegung gibt derart, dass die Formel den Wahrheitswert w hat.**

  Eine Formel, in der jeder Literal höchstens einmal vorkommt, ist immer erfüllbar!

  Eine Formel, in der keine Negation vorkommt, ist immer erfüllbar!

  $\Rightarrow$ **Nur Formeln, die einen Literal mehrfach und mindestens eine Negation enthalten, könnten unerfüllbar sein.**

- **Eine Formel heißt Tautologie oder gültig, wenn sie bei jeder Belegung den Wahrheitswert w hat.**

- **Eine Formel heißt widersprüchlich, wenn sie bei keiner Belegung den Wahrheitswert w hat.**

Aussagenlogische Formeln

Erfüllbarkeitsproblem (Satisfiability, SAT):

Wie bekommt man heraus, ob eine gegebene Formel erfüllbar ist ?

Boolesche Algebren

Formale Zusammenfassung des bisher Erlernten:

Eine **Boolesche Algebra** ist eine Menge aus Elementen mit den Operatoren $\neg$ (einstellig) und $\wedge$ und $\vee$ (jeweils zweistellig) und den Konstanten $\bot$ und $\top$, die folgenden Regeln genügt:

$$p \wedge q = q \wedge p$$
$$p \vee q = q \vee p$$
Kommutativgesetze

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$$
Assoziativgesetze

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
Distributivgesetze

$$p \wedge p = p$$
$$p \vee p = p$$
Idempotenz

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$
deMorgansche Regeln

$$\neg\neg p = p$$
Doppelte Negation (Involution)

$$p \vee \bot = p$$
$$p \wedge \top = p$$
Neutrale Elemente

$$p \wedge \bot = \bot$$
$$p \vee \top = \top$$
“Nullmultiplikation”

$$p \wedge \neg p = \bot$$
$$p \vee \neg p = \top$$
Inverses Element (Komplement)

Boolesche Algebren

Was bringt uns der Formalismus ?

Sehr viel: **Boolesche Algebren fassen mehrere Konzepte zusammen, die wir bereits kennen !**

➔ **Einmal verstanden, mehrmals angewendet**

Konzept 1: Aussagenlogik

Welche Konstante entspricht $\perp$?
Welche Konstante entspricht $\top$?

Boolesche Algebren

Konzept 2: Rechnen mit Booleschen Zahlen

Welche Operation entspricht ∨ ?
Welche Operation entspricht ∧ ?
Welche Konstante entspricht ⊥ ?
Welche Konstante entspricht ⊤ ?

p	¬p
0	1
1	0

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Konzept 3: Mengenlehre

Welche Operation entspricht ∨ ?
Welche Operation entspricht ∧ ?
Welche Konstante entspricht ⊥ ?
Welche Konstante entspricht ⊤ ?
Welche Operation entspricht ¬ ?

Normalformen

Definition:

Eine aussagenlogische Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie als Konjunktion von Disjunktionen aus Aussagen oder Negationen von Aussagen dargestellt ist.

Etwas langsamer zum Mitdenken:

Ein **Literal** ist eine Aussage oder die Negation einer Aussage.

Beispiele: $p \quad \neg q \quad r \quad \neg r$

Eine **Klausel** ist eine Disjunktion aus Literalen.

Beispiele: $p \lor \neg q \lor r \qquad \neg p \lor \neg q \lor \neg r \qquad p \lor q$

Eine **Formel in KNF** ist eine Konjunktion von Klauseln.

Beispiel: $(p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land (p \lor q)$

Normalformen

Definition:

Eine aussagenlogische Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie als Konjunktion von Disjunktionen aus Aussagen oder Negationen von Aussagen dargestellt ist.

Spezialfälle:

Eine **Klausel** darf auch nur aus einem Literal bestehen.

Beispiel: $(p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg p \wedge (p \vee q)$ ist auch in KNF

Eine **Formel** darf auch nur aus einer Klausel bestehen.

Beispiel: $p \vee \neg q \vee r$ ist auch in KNF

Eine **leere Klausel** entspricht dem neutralen Element der Disjunktion: $\perp$

Beispiel: $(p \vee \neg q \vee r) \wedge \perp \wedge (p \vee q)$ ist auch in KNF

Eine **leere Formel** entspricht dem neutralen Element der Konjunktion: $\top$

Beispiel: $\top$ ist auch in KNF

Normalformen

Welche Formeln sind eigentlich nicht in KNF ?

- Formeln, die andere als die 3 Booleschen Operatoren enthalten

  Beispiel: $((p \lor \neg q \lor r) \rightarrow (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)) \leftrightarrow (p \lor q)$

- Formeln, in denen andere Terme als atomare Aussagen negiert werden

  Beispiel: $\neg(p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land \neg(p \lor q)$

- Formeln, in denen Konjunktionen und Disjunktionen wild durcheinander sind

  Beispiel: $(p \land (\neg q \lor r)) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \lor p \land q$

  Beispiel: $p \land (\neg q \lor r \land \neg p) \lor (\neg q \land \neg r) \lor p \land q$

- Formeln, in denen eine tiefere Klammerschachtelungstiefe vorliegt

  Beispiel: $p \land (\neg q \lor (r \land q))) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land p \lor q$

Satz: **Jede aussagenlogische Formel lässt sich durch endlich viele äquivalente Umformungen in KNF bringen.**

Normalformen

Warum wollen wir Formeln in KNF bringen ?

- **Übersichtlichere Auswertung beim Erfüllbarkeitstest:**

  Eine Formel in KNF ist erfüllbar.
  ⇔ Eine Belegung enthält für jede Klausel wenigstens einen wahren Literal.

  Mögliche Belegungsstrategie:

  - Gehe die Klauseln nacheinander durch:
  - Belege genau einen noch nicht festgelegten Literal mit `t`

    (dadurch werden gleiche Literale oder deren Negationen in anderen Klauseln festgelegt)
  - Wenn es keine Möglichkeit mehr gibt, springe zurück zur vorigen Klausel und nimm eine andere Belegung

  Vorsicht vor Illusionen:

  Im schlechtesten Fall bringt das keinen Zeitgewinn verglichen mit purem Ausprobieren !

Normalformen

Warum wollen wir Formeln in KNF bringen ?

- **Kompakte Darstellbarkeit im Computer:**

Stelle Klauseln als Mengen von Literalen dar:

$\{p, \neg q, r\}$	entspricht	$(p \vee \neg q \vee r)$	**als Klausel**

Stelle Formeln als Mengen von Klauseln dar:

$\{\{p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, q\}\}$	entspricht	$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q)$

Das funktioniert sogar für die Spezialfälle:

$\{\{p, \neg q, r\}\}$	entspricht	$(p \vee \neg q \vee r)$	**als Formel**
$\{p, \neg q, r\}$	entspricht	$(p \wedge \neg q \wedge r)$	**als Formel**
$\{\}$	entspricht	$\top$	**als Formel**
$\{\{\}\}$	entspricht	$\perp$	**als Formel**

Warnung:

Was dem Computer glasklar ist, kann für den Menschen höchst verwirrend sein:

- Das Trennzeichen (,) in **inneren** Klammern (Klauseln) entspricht einer Disjunktion ($\vee$)
- Das Trennzeichen (,) in **äußeren** Klammern (Formeln) entspricht einer Konjunktion ($\wedge$)

Normalformen

Algorithmus zum Umwandeln einer Formel in die KNF:

1. Eliminiere alle Operatoren der Form $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$ mit den Ersetzungsregeln durch $\wedge$ und $\vee$!

2. Ziehe alle Negationszeichen vor Klammern in die Klammern hinein mit den deMorganschen Regeln !

3. Wende die Distributivgesetze so lange an, bis auf oberster Ebene nur noch Konjunktionen und darunter Disjunktionen sind !

Das funktioniert immer !

Andere Normalformen

Definition:

Eine aussagenlogische Formel ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie als Disjunktion von Konjunktionen aus Aussagen oder Negationen von Aussagen dargestellt ist.

Jetzt fällt das Mitdenken schon leichter:

Was ist in DNF ein **Literal** ?

Was ist in DNF eine **Klausel** ?

Was ist in DNF eine **Formel** ?

Beispiele ?

Warum wollen wir Formeln in DNF bringen ?

Eine Normalform reicht uns aus !

Beim nächsten Mal:

Aussagenlogik: Abschluss
Prädikatenlogik, 1. Teil