Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kap. 3: Verifikationstechniken
Teil 5: Rekursion

Rekursion

oder: Wie programmiert man wirklich elegant ?

```
procedure f (n: Integer): Integer
if (n=0)
  then
    return 1
  else
    return n • f(n-1)
end {f}
```

Was berechnet diese Prozedur ?

Gibt es irgendwelche Vorbedingungen ?

Wie beweist man das alles ?

Verifikation von Rekursiven Prozeduren

Wesentliche Schritte bei der Verifikation von Rekursiven Prozeduren:

1) **Beweise, dass die Berechnungen der Prozedur kontinuierlich auf dem richtigen Weg sind,**
   sodass nach Abbruch der Rekursion das Richtige berechnet ist.

   (falls die Rekursion jemals abbricht)

   Irgendetwas muss unverändert richtig sein → Invariante (Bedingung)

2) **Beweise, dass die Rekursion abbricht.**

   Irgendetwas muss sich im Laufe der Rekursion ändern → Variante (Zahl)

Wichtigste Beweistechnik: Vollständige Induktion

Verifikation von Rekursiven Prozeduren

Verifikation von Rekursiven Prozeduren mit vollständiger Induktion:

Es muss in Induktionsverankerung und im Induktionsschluss von i auf i+1 bewiesen werden, dass die Rekursion immer abbricht und das Richtige berechnet.

Die Induktionsbehauptung muss also sowohl eine Invariante als auch eine Variante im Sinne der vorigen Definition enthalten.

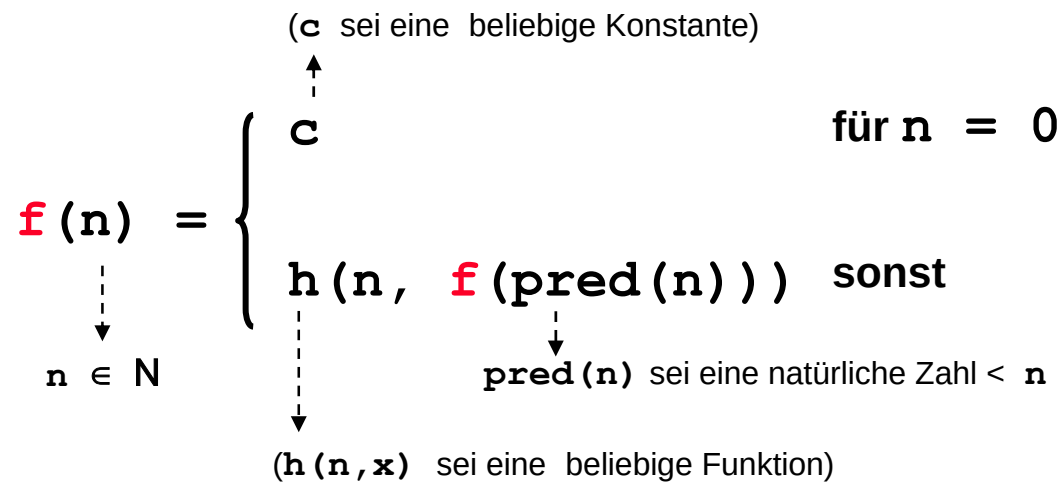
Typische Beispiele für die Wahl der Induktionsvariablen i:

1) i = Parameter im rekursiven Aufruf
2) i = Anzahl der *noch auszuführenden* Rekursionsschritte

Typische Beweistechnik im Induktionsschluss:

1) Unterscheide die Belegung der Variablen für i bzw. i+1
2) Setze die verschiedenen Belegungszustände in Beziehung zueinander und verwende die Induktionsannahme für i.

Primitiv rekursive Funktionen

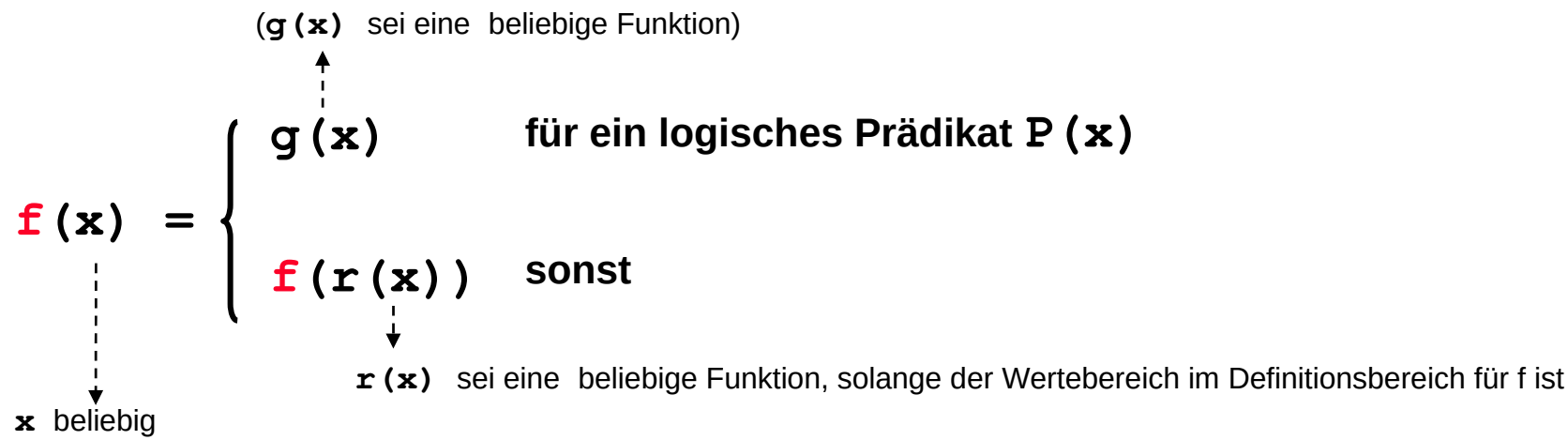



```
procedure f(n: Integer): ResultType
if (n ≤ 0)
  then
    return c
  else
    return h(n, f((pred(n)))
end {f}
```

weil Integers auch < 0 sein können

Vorteil: **Terminierung ist immer gewährleistet**

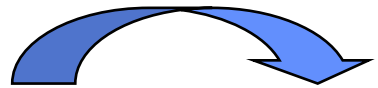
Endrekursive Funktionen




```
procedure f(x): ResultType
if P(x)
  then
    return g(x)
  else
    return f(r(x))
end {f}
```

Vorteil: **Es gibt Algorithmus zur automatischen Implementierung auf dem Computer**

Transformation



Endrekursive Funktion **Schleife**

geht immer !

```
procedure f(x): ResultType
if P(x)
  then
    return g(x)
  else
    return f(r(x))
end {f}
```

```
procedure f(x): ResultType
while ¬P(x)do
  x := r(x);
return g(x)
end {f}
```

Linear rekursive Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für ein logisches Prädikat } P(x) \\ h(x, f(r(x))) & \text{sonst} \end{cases}$$

```
procedure f(x): ResultType
if P(x)
  then
    return g(x)
  else
    return h(x, f(r(x)))
end {f}
```

Linear rekursive Funktionen können in Spezialfällen in endrekursive umgewandelt werden.

Primitiv rekursive Funktionen ⇘

Linear rekursive Funktionen

Endrekursive Funktionen ⇗

Allgemeine rekursive Funktionen

Fibonacci-Funktion:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \leq 1 \\ f(n-2) + f(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

McCarthy-Funktion:

$$f(n) = \begin{cases} n-10 & \text{für } n > 100 \\ f(f(n+11)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Ulam-Collatz-Funktion:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ f(n/2) & \text{für gerade } n \\ f(3n+1) & \text{für ungerade } n \end{cases}$$