

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Kap. 2: Logik, Teil 2.2: Prädikatenlogik

Grenzen der Aussagenlogik

Gegeben

- Alle, die die Vorlesung besuchen, bestehen die Klausur (A)
- Susi besucht die Vorlesung (B1)
- Bernd besucht die Vorlesung (B2)
- Linda besucht nicht die Vorlesung (B3)
- Alex hat die Klausur nicht bestanden (B4)

Gewünschte Folgerungen:

- Susi besteht die Klausur (C1)
- Bernd besteht die Klausur (C2)
- Linda ? Alex ?

Aussagenlogische Formeln:

- $A \wedge B1 \rightarrow C1$
- $A \wedge B2 \rightarrow C2$
- ...

Gewünschte Formel:

- $\text{besuchtVorlesung}(x) \rightarrow \text{bestehtKlausur}(x)$

In der Aussagenlogik:

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**

Grenzen der Aussagenlogik

Gegeben

- Die Klausurnote eines Studenten, der alle Übungen gelöst hat, ist 1 oder 2 (A)
- Susi hat alle Übungen gelöst (B1)
- Bernd hat alle Übungen gelöst (B2)
- Linda hat nicht alle Übungen gelöst (B3)
- Alex hat eine 5 in der Klausur (B4)

Gewünschte Formel:

- $\text{hatAlleÜbungenGelöst}(x) \rightarrow (\text{Klausurnote}(x) \leq 2)$

In der Aussagenlogik:

- keine Variablen
- keine variablenabhängigen Aussagen
- keine Funktionen über Variablen

Grenzen der Aussagenlogik

Gegeben

- Eine Vorlesung, die nur von Studenten oder nur von Studentinnen besucht wird, ist langweilig (A)
- Susi ist eine Studentin (B1)
- Bernd ist ein Student (B2)
- Susi besucht GdP (B3)
- GdP ist nicht langweilig (B5)

Gewünschte Formel:

- $((\text{besuchtVorlesung}(v, s) \rightarrow \text{weiblich}(s)) \vee (\text{besuchtVorlesung}(v, s) \rightarrow \neg \text{weiblich}(s))) \rightarrow \text{langweilig}(v)$
- Wie drückt man aus, dass eine Vorlesung nur von Studenten oder nur von Studentinnen besucht wird ?
- Wie drückt man aus, dass es für jede Vorlesung überhaupt Studenten oder Studentinnen geben sollte, die sie besuchen ?

In der Aussagenlogik:

- **keine Variablen**
- **keine variablenabhängigen Aussagen**
- **keine Funktionen über Variablen**
- **keine Operatoren „für alle“ oder „es gibt“**

Von der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik

In der Aussagenlogik:

- keine Variablen
- keine variablenabhängigen Aussagen
- keine Funktionen
- keine Operatoren „für alle“ oder „es gibt“

In der Prädikatenlogik:

- Variable
- Prädikate
- Funktionen
- Quantoren

Prädikatenlogik

- **Variable**

In eine Variable dürfen beliebige Elemente eingesetzt werden.

Könnten nicht die Literale in der Aussagenlogik als Variable aufgefasst werden ?

Was ist bei Literalen in der Aussagenlogik anders ?

- **Prädikate**

Ein Prädikat ist eine Aussage, die von anderen Werten abhängt.

Die Anzahl der Werte, von denen ein Prädikat abhängt, ist für jedes Prädikat eine beliebige, aber feste Zahl.

Ein Prädikat, das von k Werten abhängt, heißt k -stellig.

Kurzform: $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$

Prädikatenlogik

- **Beispiele zu Prädikaten:**
 1. Zwei Personen sind miteinander verheiratet
 2. Eine Person liebt eine andere
 3. Eine Person hasst eine andere
 4. Eine Person besucht die Vorlesung GdT
 5. Eine Person besucht eine beliebige Vorlesung
 6. Ein Ort liegt zwischen zwei anderen

Prädikatenlogik

- **Funktionen**

Eine Funktion ist eine Zuordnung, die einer Menge von Werten einen neuen Wert eindeutig zuordnet.

Kurzform: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$

Eine Funktion, die von k Werten abhängt, heißt k-stellig.

Bsp.: Drücke folgenden Sachverhalt mit prädikatenlogischen Hilfsmitteln aus:

$(2 < x < 4) \wedge (0 < y < 6) \wedge (x + y > 7) \wedge (x \cdot y < 10)$

Prädikatenlogik

- **Quantoren**

Der **Existenzquantor** $\exists x$ (...) beschreibt die Aussage, dass es (mindestens) einen Wert für x gibt, der die dahinter stehende Aussageform in x zu einer wahren Aussage macht.

Der **Allquantor** $\forall x$ (...) beschreibt die Aussage, dass jeder Wert für x die dahinter stehende Aussageform in x zu einer wahren Aussage macht.

Die Definitionsbereiche für die Variablen dürfen eingeschränkt werden:

Für den Existenzquantor ist das eine Verschärfung,
für den Allquantor eine Abschwächung der Aussage.

Prädikatenlogische Formeln

- Eine **prädikatenlogische Formel 1. Stufe** ist eine Verknüpfung von endlich vielen Variablen, Funktionen und Prädikaten mit aussagenlogischen Operatoren oder Quantoren, die sich nur auf Variable beziehen.

Bsp.: $\forall x (R(y, z) \wedge \exists y (\neg P(y, x) \vee R(y, z)))$

Grüne Vorkommen von y und z sind **frei**.

Rote Vorkommen von x , y und z sind **gebunden**.

Prädikatenlogische Formeln

- Eine **Belegung einer Formel** ist eine Zuweisung von *Werten aus festgelegten Definitionsbereichen an die freien Variablen* derart, dass dieselben Variablen immer denselben Wert erhalten.
- Eine Formel heißt **erfüllbar**, wenn es eine Belegung gibt derart, dass die Formel wahr ist.
- Das Erfüllbarkeitsproblem ist in der Prädikatenlogik **nicht entscheidbar**, d.h. kein Algorithmus kann jemals in der Lage sein, von jeder Formel zu entscheiden, ob sie erfüllbar ist oder nicht.



Das allgemeine Problem ist unlösbar !

Prädikatenlogik

Beschreibung der semantischen Eigenschaft einer Formel $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ mit prädikatenlogischen Mitteln:

- **F ist erfüllbar:**

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_k \quad (F(x_1, x_2, \dots, x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widersprüchlich:**

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_k \quad (F(x_1, x_2, \dots, x_k) \leftrightarrow \perp)$$

- **F ist gültig (Tautologie):**

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_k \quad (F(x_1, x_2, \dots, x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widerlegbar (falsifizierbar):**

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_k \quad (F(x_1, x_2, \dots, x_k) \leftrightarrow \perp)$$

Was fällt auf ?

Prädikatenlogik

„Rechenregeln“ für die Quantoren:

$$\neg \forall x (F(x)) \Leftrightarrow \exists x (\neg F(x))$$

$$\neg \exists x (F(x)) \Leftrightarrow \forall x (\neg F(x))$$

Verallgemeinerung von deMorgan

$$\forall x \forall y (F(x,y)) \Leftrightarrow \forall y \forall x (F(x,y))$$

$$\exists x \exists y (F(x,y)) \Leftrightarrow \exists y \exists x (F(x,y))$$

Vertauschung gleicher Quantoren

Was gilt bei der Vertauschung **verschiedener** Quantoren ? ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow, \nLeftrightarrow$)

$$\exists x \forall y (F(x,y)) \qquad \forall y \exists x (F(x,y))$$

$$\exists y \forall x (F(x,y)) \qquad \forall x \exists y (F(x,y))$$

Prädikatenlogik

„Rechenregeln“ für die Quantoren:

Was gilt bei Hineinziehen von Quantoren in \wedge oder \vee ? ($\Leftrightarrow, \Rightarrow, \Leftarrow, \nLeftrightarrow$)

$$\forall x (F(x)) \vee \forall x (G(x))$$

$$\forall x (F(x) \vee G(x))$$

$$\forall x (F(x)) \wedge \forall x (G(x))$$

$$\forall x (F(x) \wedge G(x))$$

$$\exists x (F(x)) \vee \exists x (G(x))$$

$$\exists x (F(x) \vee G(x))$$

$$\exists x (F(x)) \wedge \exists x (G(x))$$

$$\exists x (F(x) \wedge G(x))$$

Prädikatenlogik

Arithmetische Vergleichsprädikate:

Präfix-Notation

(Standard in Prädikatenlogik)

`lessThan (x, y)`

`equal (x, y)`

Infix-Notation

(Standard in Arithmetik)

$x < y$

$x = y$

Postfix-Notation

(Standard auf alten Taschenrechnern ohne Klammern)

$x, y, <$

$x, y, =$

Mit diesen beiden Prädikaten lassen sich alle anderen Vergleichsprädikate bilden:

$x \leq y$

$x \geq y$

$x \neq y$

$x > y$

Wie drückt man mit diesen Prädikaten aus, dass eine Zahl x zwischen y und z liegt ?

Prädikatenlogik

Arithmetische Vergleichsprädikate:

Bilde das Gegenteil von:

$$1) (x > 0) \vee ((y + x) \leq 0)$$

$$2) \forall y < 0 ((x > 0) \vee ((y + x) \leq 0))$$

Prädikatenlogik

Was bedeuten eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren ?

$\forall y \in D (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\forall y (y \in D \rightarrow P(y))$
 $\Leftrightarrow \forall y (y \notin D \vee P(y))$

$\exists y \in D (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\exists y ((y \in D \wedge P(y)))$

Daher gilt für die Negation:

$\neg(\forall y \in D (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\forall y (y \notin D \vee P(y))) \Leftrightarrow \exists y (y \in D \wedge \neg P(y))$
 $\Leftrightarrow \exists y \in D (\neg P(y))$

$\neg(\exists y \in D (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\exists y (y \in D \wedge P(y))) \Leftrightarrow \forall y (y \notin D \vee \neg P(y))$
 $\Leftrightarrow \forall y \in D (\neg P(y))$

→ Eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren werden bei Negationen nicht ebenfalls negiert !

Prädikatenlogik

Anwendung auf Aufgabe von vorhin:

Bilde das Gegenteil von: $\forall y < 0 \left((x > 0) \vee ((y+x) \leq 0) \right)$

Lösung:

$$\forall y < 0 \left((x > 0) \vee ((y+x) \leq 0) \right)$$

ist Kurzschreibweise von: $\forall y \left(\neg(y < 0) \vee ((x > 0) \vee ((y+x) \leq 0)) \right)$

„Gegenteil“ soll heißen: Negation der oben angegebenen Formel

$$\begin{aligned} \neg \forall y \left(\neg(y < 0) \vee ((x > 0) \vee ((y+x) \leq 0)) \right) \\ \Leftrightarrow \exists y \left((y < 0) \wedge (x \leq 0) \wedge ((y+x) > 0) \right) \\ \Leftrightarrow \exists y < 0 \left((x \leq 0) \wedge ((y+x) > 0) \right) \\ \Leftrightarrow \perp \text{ für alle } x \end{aligned}$$

Also ist die Negation ein Widerspruch

Was folgt dann für die ursprüngliche Formel ?

Prädikatenlogik

Achtung: Unterscheide, **wo** die Negation steht:

Aussagen für **negierte Formeln**: $(F(x) \leftrightarrow \top) \Leftrightarrow (\neg F(x) \leftrightarrow \perp)$
(gilt für *beliebige* x)

Damit gilt: $F(x)$ ist Tautologie $\Leftrightarrow \neg F(x)$ ist Widerspruch
 $F(x)$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow \neg F(x)$ ist widerlegbar

Also ist die Formel $F(x) \leftrightarrow \forall y < 0 ((x > 0) \vee ((y+x) \leq 0))$ eine Tautologie,
da $\neg F(x) \leftrightarrow \neg (\forall y < 0 ((x > 0) \vee ((y+x) \leq 0)))$ ein Widerspruch ist.

Negierte Aussagen für dieselbe Formel $F(x)$:

$F(x)$ ist Tautologie $\Leftrightarrow F(x)$ ist **nicht** widerlegbar
 $F(x)$ ist widerlegbar $\Leftrightarrow F(x)$ ist **nicht** Tautologie
 $F(x)$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow F(x)$ ist **nicht** widersprüchlich
 $F(x)$ ist widersprüchlich $\Leftrightarrow F(x)$ ist **nicht** erfüllbar

Unterscheide: $F(x)$ ist **nicht** widerlegbar $\neq \neg F(x)$ ist widerlegbar