Fachhochschule Wedel 08.08.2006

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur Klausur und Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (SS 2006)

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: keine

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein. Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 45 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 22,5 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (6 BE):

Gegeben sei als Grundmenge Ω die Menge aller Wörter der englischen Sprache. Ferner seien folgende Teilmengen von Ω gegeben:

A = {x | x ist ein Wort, das lexikographisch kleiner ist (nicht gleich!) als “dog”}

B = {x | x ist ein Wort, das lexikographisch größer ist (nicht gleich!) als “dog”}

C = {x | x ist ein Wort, das kein Tiername ist}

D = {x | x ist ein Wort, das lexikographisch nicht kleiner ist als “cat”}

Geben Sie für jede der folgenden Mengen ein Element an, das in dieser Menge liegt, oder begründen Sie, warum das nicht möglich ist (insgesamt werden also 8 Antworten erwartet, von denen die ersten vier jeweils mit 0,5 und die letzten vier mit jeweils 1 BE bewertet werden):

$A, B, C, D, \sim(A \cup B), \sim(A \cup B \cup C), \sim(A \cup B \cup C \cup D), C \Delta D$

Anm.: Hierbei steht ~ für das Komplement (bzgl. Ω) und Δ für die symmetrische Differenz.

2. Aufgabe (10 BE)

Sei M = {1, 2, 3, 4} eine Menge und R = {(1,3); (1,2); (2,1); (3,1); (4,4)} eine Relation.

a) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen i) – v) an, ob sie wahr ist, und begründen Sie kurz Ihre Antwort: (5 BE)

   i) R ist eine Teilmenge von M x M

   ii) R ist eine Teilmenge der Potenzmenge von M

   iii) R ist eine Äquivalenzrelation auf M

   iv) R ist eine Ordnungsrelation auf M

   v) R ist eine Funktion

b) Geben Sie die Komposition $R \circ R$ explizit an! (1 BE)

c) Wie viele Elemente hat die Komposition $R \circ R$? (1 BE)

d) Geben Sie an, ob $R \circ R$ eine Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation oder Funktion ist (äußern Sie sich zu allen 3 Sachverhalten!) und begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort! (3 BE)

3. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei die Boolesche Algebra $\mathscr{B} = \{m \in \mathbb{N}: m \text{ teilt } 42\}$ mit den Operationen i), ii), iii):

i) $\sim p = 42 / p$

ii) $p \oplus q = \text{ggT}(p,q)$

iii) $p \odot q = \text{kgV}(p,q)$

a) Geben Sie das Nullelement und das Einselement an! (1 BE)

b) Geben Sie das Komplement von 7 an! (1 BE)

c) Zeigen Sie, dass jeweils das Distributivgesetz für $(3 \oplus 6) \odot 7$ und $(3 \odot 6) \oplus 7$ erfüllt ist (2 Aufgaben, mit Angabe der Zwischenwerte)! (4 BE)

4. Aufgabe (4 BE)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: Es gibt n! Permutationen aus n Elementen.

5. Aufgabe (5 BE)

a) Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für die Gruppe $(\mathbb{Z}_4^*, *)$ an! (2 BE)

b) Zu welcher Additionsgruppe ist $\mathbb{Z}_4^*$ isomorph? Geben Sie den Isomorphismus explizit an! (2 BE)

c) Wenn Sie die Operation * in $\mathbb{Z}_4^*$ als die additive Verknüpfung auffassen, kann man dann noch eine multiplikative Verknüpfung definieren, sodass aus $\mathbb{Z}_4^*$ ein Körper wird? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie entweder die multiplikative Verknüpfung explizit angeben oder aber kurz begründen, warum das nicht geht! (1 BE)

6. Aufgabe (7 BE)

a) Arbeiten Sie für die Multiplikation in GF (8) mit dem Polynom x^3+x+1: Über welchem Körper muss dieses Polynom irreduzibel sein? Weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach! Könnte man auch das irreduzible Polynom x^2+x+1 nehmen ? (3 Aufgaben) (3 BE)

b) Multiplizieren Sie in GF (8) die Elemente x^2+1 und x^2+x+1 mit Hilfe des Polynoms aus a) (4 BE)

7. Aufgabe (7 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Gesucht sei der kürzeste Weg von A nach E mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra: Geben Sie die Reihenfolge der Ecken an, in welcher der Algorithmus den kürzeste Weg von A bestimmt, bis er den kürzesten Weg zur Ecke E bestimmt hat! Geben Sie für all diese Ecken die errechnete Weglänge an! Geben Sie an, zu welchen Ecken der Algorithmus den kürzesten Weg von A bei Erreichen von E noch nicht bestimmt hat! (3 BE)

b) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner)! (2 BE)

c) Hat der Graph einen Euler- oder Hamiltonkreis? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! (2 BE)