Fachhochschule Wedel 14.09.2006

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (SS 2006)

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein. Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 38 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 19 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (7 BE):

Gegeben seien die folgenden Teilmengen der natürlichen Zahlen:

$A = \{x \mid x \text{ teilt } 4\}$

$B = \{x \mid x \text{ ist ein Vielfaches von } 4\}$

$C = \{x \mid x \text{ teilt } 40\}$

a) Beschreiben Sie die Mengen $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$ und $B \cap C$ durch Elementaufzählung! (4 Mengen) (4 BE)

b) Geben Sie die Wahrheitswerte der Aussagen i) – iii) an (mit Begründung): (3 BE)

i) $(A \cup B) \subseteq (A \cup C)$

ii) $A \subseteq (B \cap C)$

iii) $(B \cap C) \in B$

2. Aufgabe (6 BE)

Ein Lehrer hat Aufsicht im Pausenhof. Er findet folgende Situation vor:

Kai prügelt sich mit Wolfgang, Wolfgang mit Alex und Alex mit Kai. Ferner sieht er eine Rangelei zwischen Linda und Sabine.

Bevor der Lehrer die Streitereien schlichtet, überlegt er sich, wie er aus der Relation S (steht für „streitet mit“) eine Äquivalenz- oder eine Ordnungsrelation machen kann. Helfen Sie ihm:

a) Geben Sie die Grundmenge M an (mit allen Elementen), auf der S die Relation ist! Geben Sie auch alle Elemente der Relation S explizit an! Gefragt ist die Schreibweise von S als Menge. (2 BE)

b) Erweitern Sie S um zusätzliche Elemente zu einer Relation S’, sodass S eine Äquivalenz- oder eine Ordnungsrelation ist! Es ist verboten, Elemente aus S wegzunehmen. Was für ein Relationstyp ist S’? (es gibt nur eine Möglichkeit) (3 BE)

c) Geben Sie die Äquivalenzklassen bzw. das Hassediagramm von S an (je nach Antwort in b)! (1 BE)

3. Aufgabe (4 BE)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n: $\sum_{i=0}^{n} 4^i = \frac{4^{n+1}-1}{3}$

4. Aufgabe (4 BE)

a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 5915 und 9282 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Geben Sie die Zwischenschritte an! (3 BE)

b) Geben Sie auch das kleinste gemeinsame Vielfache an! (1 BE)

5. Aufgabe (6 BE)

Führen Sie die Berechnungen in GF(8) für die Beispiele a) – d) durch!
Die Benennung der Elemente von GF(8) sei folgende:

0	1	x	$x+1$	x^2	x^2+1	x^2+x	x^2+x+1
0	1	2	3	4	5	6	7

Nutzen Sie bei Bedarf das irreduzible Polynom x^3+x+1.

a) 2+3 b) 2*3 c) 6+5 d) 6*7

e) Zu welcher Gruppe ist die Multiplikationsgruppe von GF (8) isomorph?

6. Aufgabe (5 BE)

a) Berechnen Sie die Komposition der Permutationen (1 2 3) (1 2) !
(gegeben in Zyklenschreibweise) (1 BE)

b) Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die Komposition nicht kommutativ ist! (1 BE)

c) Handelt es sich beim Ergebnis von a) um eine gerade oder ungerade Permutation? (1 BE)

d) Geben Sie alle geraden Permutationen aus den Elementen 1, 2 und 3 an! (2 BE)

7. Aufgabe (6 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph: Die Kantennummern entsprechen den Kantenlängen.

a) Bestimmen Sie den minimalen spannenden Baum (= minimales Gerüst): Geben Sie die Nummern der Kanten an, die dazugehören! (2 BE)

b) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner)! (2 BE)

c) Ist der Graph plättbar (= planar)? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)