Grundlagen der Programmierung

Vorlesung 4

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Grundlagen der Programmierung

1. Einführung
   - Grundlegende Eigenschaften von Algorithmen und Programmen
2. Logik
   - Aussagenlogik
   - ➔ Prädikatenlogik
3. Programmentwicklung und –verifikation
   - Grundlagen der Programmverifikation
   - Verbundanweisungen
   - Verzweigungen
   - Schleifen
   - Modularisierung
   - Rekursion
4. Entwurf und Analyse von Algorithmen
   - Klassifikation von Algorithmen
   - Programmierung von Algorithmen
   - Bewertung von Algorithmen

Prädikatenlogik

Beschreibung der semantischen Eigenschaft einer Formel $\mathbf{F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k)}$ mit prädikatenlogischen Mitteln:

- **F ist erfüllbar:**

  $$\exists\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k \quad (F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widersprüchlich:**

  $$\forall\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k \quad (F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k) \leftrightarrow \bot)$$

- **F ist gültig (Tautologie):**

  $$\forall\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k \quad (F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k) \leftrightarrow \top)$$

- **F ist widerlegbar (falsifizierbar):**

  $$\exists\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k \quad (F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k) \leftrightarrow \bot)$$

Was fällt auf ?

Prädikatenlogik

„Rechenregeln“ für die Quantoren:

$\neg\forall x\,(F(x)) \Leftrightarrow \exists x\,(\neg F(x))$

$\neg\exists x\,(F(x)) \Leftrightarrow \forall x\,(\neg F(x))$

Verallgemeinerung von deMorgan

$\forall x\ \forall y\,(F(x,y)) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\,(F(x,y))$

$\exists x\ \exists y\,(F(x,y)) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\,(F(x,y))$

Vertauschung gleicher Quantoren

Was gilt bei der Vertauschung verschiedener Quantoren ? ($\Leftrightarrow$,$\Rightarrow$,$\Leftarrow$,$\not\Leftrightarrow$)

$\exists x\ \forall y\,(F(x,y))$ $\qquad\qquad$ $\forall y\ \exists x\,(F(x,y))$

$\exists y\ \forall x\,(F(x,y))$ $\qquad\qquad$ $\forall x\ \exists y\,(F(x,y))$

Prädikatenlogik

„Rechenregeln“ für die Quantoren:

Was gilt bei Hineinziehen von Quantoren in $\wedge$ oder $\vee$? ($\Leftrightarrow$,$\Rightarrow$,$\Leftarrow$,$\not\Leftrightarrow$)

$\forall x\ (F(x)) \vee \forall x\ (G(x))$	$\forall x\ (F(x) \vee G(x))$
$\forall x\ (F(x)) \wedge \forall x\ (G(x))$	$\forall x\ (F(x) \wedge G(x))$
$\exists x\ (F(x)) \vee \exists x\ (G(x))$	$\exists x\ (F(x) \vee G(x))$
$\exists x\ (F(x)) \wedge \exists x\ (G(x))$	$\exists x\ (F(x) \wedge G(x))$

Prädikatenlogik

Arithmetische Vergleichsprädikate:

Präfix-Notation	Infix-Notation	Postfix-Notation
(Standard in Prädikatenlogik)	(Standard in Arithmetik)	(Standard auf alten Taschenrechnern ohne Klammern)
`lessThan (x,y)`	`x < y`	`x, y, <`
`equal (x,y)`	`x = y`	`x, y, =`

Mit diesen beiden Prädikaten lassen sich alle anderen Vergleichsprädikate bilden:

```
x ≤ y

x ≥ y

x ≠ y

x > y
```

Wie drückt man mit diesen Prädikaten aus, dass eine Zahl x zwischen y und z liegt ?

Prädikatenlogik

Arithmetische Vergleichsprädikate:

Bilde das Gegenteil von:

1) $(x>0) \lor ((y+x)\leq 0)$

2) $\forall y<0\ ((x>0) \lor ((y+x)\leq 0))$

Prädikatenlogik

Was bedeuten eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren ?

$\forall\ y \in D\ (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\forall\ y\ (y \in D \rightarrow P(y))$

$\Leftrightarrow \forall\ y\ (y \notin D \vee P(y))$

$\exists\ y \in D\ (P(y))$ ist Kurzschreibweise von: $\exists\ y\ ((y \in D \wedge (P(y))$

Daher gilt für die Negation:

$\neg(\forall\ y \in D\ (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\forall\ y\ (y \notin D \vee P(y))) \Leftrightarrow \exists\ y\ (y \in D \wedge \neg P(y))$

$\Leftrightarrow \exists\ y \in D\ (\neg P(y))$

$\neg(\exists\ y \in D\ (P(y))) \Leftrightarrow \neg(\exists\ y\ (y \in D \wedge P(y))) \Leftrightarrow \forall\ y\ (y \notin D \vee \neg P(y))$

$\Leftrightarrow \forall\ y \in D\ (\neg P(y))$

➔ **Eingeschränkte Definitionsbereiche für Quantoren werden bei Negationen nicht ebenfalls negiert !**

Prädikatenlogik

Anwendung auf Aufgabe von vorhin:

Bilde das Gegenteil von: $\forall \mathbf{y}<0\ ((\mathbf{x}>0)\ \lor\ ((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0))$

Lösung:

$\forall \mathbf{y}<0\ ((\mathbf{x}>0)\ \lor\ ((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0))$

ist Kurzschreibweise von: $\forall \mathbf{y}\ (\neg(\mathbf{y}<0)\ \lor\ ((\mathbf{x}>0)\lor((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0)))$

„Gegenteil“ soll heißen: Negation der oben angegebenen Formel

$$\neg\forall \mathbf{y}\ (\neg(\mathbf{y}<0)\ \lor\ ((\mathbf{x}>0)\lor((\mathbf{y}+\mathbf{x})\leq 0)))$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{y}\ ((\mathbf{y}<0)\ \land\ (\mathbf{x}\leq 0)\land((\mathbf{y}+\mathbf{x})>0)))$$

$$\Leftrightarrow \exists \mathbf{y}<0\ ((\mathbf{x}\leq 0)\ \land\ ((\mathbf{y}+\mathbf{x})>0)))$$

$\Leftrightarrow \perp$ **für alle x**

Also ist die Negation ein Widerspruch

Was folgt dann für die ursprüngliche Formel ?

Prädikatenlogik

Achtung: Unterscheide, wo die Negation steht:

Aussagen für negierte Formeln: $(F(x) \leftrightarrow \top) \Leftrightarrow (\neg F(x) \leftrightarrow \bot)$

(gilt für *beliebige* x)

Damit gilt:

$F(x)$ ist Tautologie	$\Leftrightarrow$	$\neg F(x)$ ist Widerspruch
$F(x)$ ist erfüllbar	$\Leftrightarrow$	$\neg F(x)$ ist widerlegbar

Also ist die Formel $F(x) \Leftrightarrow \forall y{<}0\ ((x{>}0) \vee ((y{+}x) \leq 0))$ eine Tautologie,
da $\neg F(x) \Leftrightarrow \neg (\forall y{<}0\ ((x{>}0) \vee ((y{+}x) \leq 0)))$ ein Widerspruch ist.

Negierte Aussagen für dieselbe Formel $F(x)$:

$F(x)$ ist Tautologie	$\Leftrightarrow$	$F(x)$ ist **nicht** widerlegbar
$F(x)$ ist widerlegbar	$\Leftrightarrow$	$F(x)$ ist **nicht** Tautologie
$F(x)$ ist erfüllbar	$\Leftrightarrow$	$F(x)$ ist **nicht** widersprüchlich
$F(x)$ ist widersprüchlich	$\Leftrightarrow$	$F(x)$ ist **nicht** erfüllbar

Unterscheide: $F(x)$ ist **nicht** widerlegbar $\neq$ $\neg F(x)$ ist widerlegbar

Beim nächsten Mal:

Programmentwicklung und -verifikation