1.)

a) Eigenschaften:

- $A \sim A$ → reflexiv (ROT ~ ROT)
- $A \sim B \wedge B \sim A$ nur, wenn $A = B$

  ⇒ antisymmetrisch (ROT ~ ROT, ROT ~ ROTE, ROTE ≁ ROT)
- $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

  ⇒ transitiv

  (abc ~ abcd, abcd ~ abcde ⇒ abc ~ abcde)
- linear?:

  ART ≁ ROT ∧ ROT ≁ ART

  ⇒ nicht linear.

Damit ist die Relation:

- reflexiv
- antisymmetrisch
- transitiv
- nicht linear.

Somit liegt keine Äquivalenzrelation vor, jedoch eine Ordnungsrelation (Halbordnung).

(Äquivalent: - reflexiv, symmetrisch, transitiv;
totale Ordnung: zusätzlich linear)

s. Rückseite!

b)

TORNADOROT — TORNADO — TOR

KONTOR — KONTO

ROTOR — ROT

c) Maximale Elemente: TORNADOROT, KONTOR, ROTOR

Minimale Elemente: TOR, KONTO, ROT

2.)

a) Nullelement: 24, wg.

$$p \oplus q = p \oplus 24 = ggT(p;24) = p$$

Einselement: 1, wg.

$$p \odot q = p \odot 1 = kgV(p,1) = p$$

b) $\sim p = {}^{24}/_{p}$.

$\hookrightarrow \sim 8 = \frac{24}{8} = 3.$

c) 1. $p \odot (q \oplus r) \overset{?}{=} (p \odot q) \oplus (p \odot r)$?

$\hookrightarrow 4 \odot (6 \oplus 8) \overset{?}{=} (4 \odot 6) \oplus (4 \odot 8)$

$kgV(4, ggT(6,8)) \overset{?}{=} ggT(kgV(4,6), kgV(4,8))$

$kgV(4,2) \overset{?}{=} ggT(12,8)$

$4 = 4$ ✓

2. $p \oplus (q \odot r) \overset{?}{=} (p \oplus q) \odot (p \oplus r)$

↳ $4 \oplus (6 \odot 8) \overset{?}{=} (4 \oplus 6) \odot (4 \oplus 8)$

$ggT(4, kgV(6,8)) \overset{?}{=} kgV(ggT(4,6), ggT(4,8))$

$ggT(4, 24) \overset{?}{=} kgV(2, 4)$

$4 = 4$ ✓

3. Es gibt $n!$ Möglichkeiten, n Studenten auf n Plätze zu verteilen.

<u>Induktionsvoraussetzung:</u>

$n = 0$: Es gibt nur eine Möglichkeit, keinen Studenten zu verteilen. $1 = 0! = 1$ ✓

(Wenig anschaulich, daher:

$n = 1$: Es gibt nur eine Möglichkeit, einen Studenten auf einen Platz zu verteilen.
$1 = 1! = 1$ ✓.)

<u>Induktionsschluss: $n \to n+1$:</u>

Für den ersten aus $(n+1)$ Studenten gibt es $(n+1)$ Möglichkeiten, ihn zu platzieren; übrig bleiben n Studenten und n Plätze; hierfür gibt es nach Induktionsvoraussetzung $n!$ Möglichkeiten.

⇒ Gesamtanzahl: $(n+1) \cdot n!$ (1. Student

s. Rückseite! →

(Möglichkeiten 1. Student × Möglichkeiten restliche Studenten)

$\Rightarrow$ insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$

Möglichkeiten. q.e.d.

4.) a) $ggT(4160, 1024) = ?$

$4160 = 4 \cdot 1024 + 64$

$1024 = 16 \cdot \underline{\underline{64}} + 0$

$\Rightarrow ggT(4160, 1024) = ggT(1024, 64) = 64.$

b) $kgV(4160, 1024) = ?$

Hilfsatz: $ggT(p, q) \cdot kgV(p, q) = p \cdot q.$

$\Rightarrow \quad 64 \cdot kgV(4160, 1024) = 4160 \cdot 1024$

$\Leftrightarrow kgV(4160, 1024) = \frac{4160 \cdot 1024}{64} = \underline{\underline{66.560}}.$

5.)

a) Ich entscheide mich für <u>7</u> Elemente, da es nach dem Satz von Galois nur endliche Körper mit p^r Elementen (p Primzahl, r natürliche Zahl) gibt.
Somit ~~es~~ kann kein Körper mit 6 Elementen existieren ($6 = 2 \cdot 3$; $2 \wedge 3$ untersch. Primzahlen).

b) $\mathbb{Z}_7$:

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

s. Rückseite! ⟶

6.)

a) $(2+2)\cdot 3 = 0\cdot 3 = 0.$

$(2+2)\cdot 3 \overset{?}{=} (2\cdot 3)+(2\cdot 3)$

$(2\cdot 3)+(2\cdot 3) = 1+1 = 2 \neq 0$!

Folglich gilt das Distributivgesetz nicht
$\Rightarrow$ Hubert hat keinen Körper konstruiert.

b) Betrachtet man die Konstruktionsvorschriften für $GF(4)$, und identifiziert die Nummern mit Polynomen, so zeigt sich, dass die Multiplikationstafel korrekt ist:

$0 \to 0 \qquad 1 \to 1 \qquad 2 \to x \qquad 3 \to x+1.$

$0\cdot ?$, $1\cdot ?$ ist korrekt (ersichtlich).

$2\cdot 2 \hat{=} x\cdot x = x^2$;

$\underline{x^2+x+1 \text{ ist irreduzibel}}$ $(0^2+0+1 = 1;\ 1^2+1+1 = 1)$

$\hookrightarrow x^2 \bmod (x^2+x+1) = x+1 \hat{=} 3.$

$2\cdot 3 \hat{=} x\cdot(x+1) = x^2+x$;

$x^2+x+1 \bmod x^2+x+1 = 1 \hat{=} 1$

$3\cdot 3 \hat{=} (x+1)^2 = x^2+2x+1 = x^2+1$

(Beispielrechnung): $(x^2+1) : (x^2+x+1) = 1 \ R\ x.$
$\underline{+(x^2+x+1)}$
x

$\Rightarrow x^2+1 \bmod x^2+x+1 = x \hat{=} 2.$

Damit ist die Additionstabelle zu verändern, da die Multiplikationstabelle korrekt ist (nach Konstruktionsvorschrift).

Begründung war nicht verlangt!

Daher Extrapunkt!

7)

S_4: $\underline{(1)}$, (12), (13), (14), (23), (24), (34), $\underline{(123)}$,
~~(124), (132), (142), (234), (243),~~
~~(324), (342)~~
$\underline{(132)}$, $\underline{(124)}$, $\underline{(142)}$, $\underline{(234)}$, $\underline{(243)}$,
$\underline{(134)}$, $\underline{(143)}$, (1234), (1243),
(1324), (1342), (1423), (1432),
$\underline{(12)(34)}$, $\underline{(13)(24)}$, $\underline{(14)(23)}$

$\underline{\quad}$ = gerade Permutationen

Kontrolle: $24 = 4!$ Permutationen.
Dies sind alle Permutationen
(symmetrische Gruppe S_4).

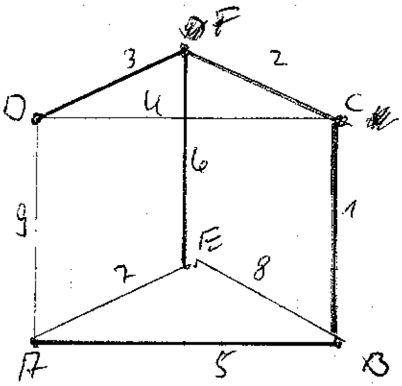
Davon sind gerade (alternierende Gruppe):
(1); $(123) = (13)(12)$; $(132) = (12)(13)$; $(124) = (14)(12)$;
$(142) = (12)(14)$; $(234) = (24)(23)$; $(243) = (23)(24)$;
$(134) = (14)(13)$; $(143) = (13)(14)$; $(12)(34)$;
$(13)(24)$; $(14)(23)_{4c}$

Permutationen der Art (1324) (Zykluslänge 4)
lassen sich in 3 Transpositionen aufteilen.
$[(14)(12)(13)]$

s. Rückseite! →

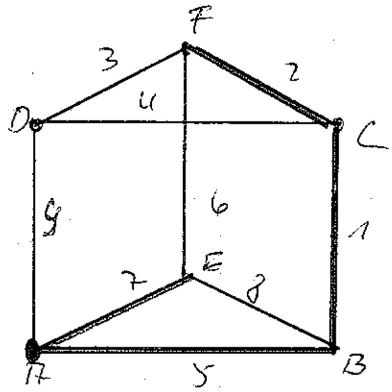
Da alle Permutationen entweder immer geraden oder immer ungerade sind, gibt es keine weiteren geraden Transpositionen.

8.) a)



M = spannender Baum mit Kanten (B;C); (C;F); (F;D); (A;B); (E;F)

b)



M = berechnete Wege

A; B; C; F: kürzester Weg von A zu F (Länge 8)

~~1. Aufteilen~~

Berechnet: A_0 ; B_{A5} ; C_{B6} ; E_{A7} ; F_{C8}

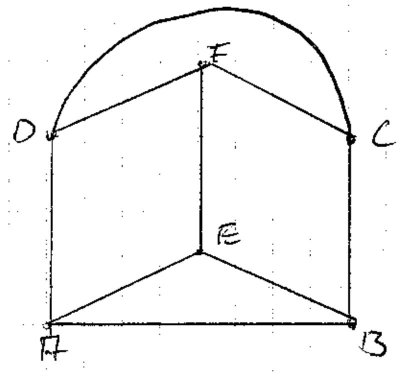
1. 3. 2. 4.

Unberechnet: ~~B_{A5}~~ ; ~~E_{A7}~~ ; D_{A9} ; ~~C_{B6}~~ ; ~~F_{C8}~~ ;

Vorgehensweise:

1. A_0 wird als berechnet gesetzt;
2. Der ~~ke~~ derzeit kürzeste Weg von A zu B, D, E wird berechnet.
3. ~~B wird~~ der Weg zu B ist berechnet;
   → derzeit kürzeste Wege zu E (nur Prüfung), C ;
4. ~~C ist~~ Weg zu C ist berechnet;
   → derzeit kürzeste Wege zu D (Prüfung), F ;
5. Weg zu E ist berechnet, Überprüfung Weg zu F
6. Weg zu F ist berechnet

c) Ja, der Graph ist planar, denn er ist wie folgt darstellbar:



d)

A, B, E sind paarweise adjazent, damit ist $\chi(G) \geq 3$; (wg. des Vierfarbensatzes gilt auch: $\chi(G) \leq 4$).

Bei diesem Graph ist $\chi(G) = 3$, d.h. ~~ist~~ er lässt sich zulässig mit 3 Farben färben: