Diskrete Mathematik

Inhalte 12. Vorlesungswoche
Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Referenzen zum Nacharbeiten:

Lang 6.5-6.7, 6.8 (nur Unterteilungen), 6.10
Beutelspacher 8.4, 8.5
zur Vertiefung: Matousek 5

6. Graphentheorie

6.4 Planare Graphen

Definition *Planarer Graph*:

Graph, der in der Ebene so dargestellt werden kann,
dass sich seine Kanten nicht überkreuzen.

(Beutelspacher nennt das plättbaren Graphen.
Planare Graphen sind bei ihm Graphen, die mit dieser Eigenschaft dargestellt *sind*.)

Definition *Gebiet (Land)*:

Ein Gebiet eines ebenen Graphen zu einer *gegebenen kreuzungsfreien Darstellung in der Ebene* ist eine maximale Fläche in der Ebene, in der je zwei Punkte durch eine Kurve verbunden werden können, die keine Kante des Graphen schneidet.

Ein Gebiet wird häufig durch die Angabe der Begrenzungskanten charakterisiert („Nadeln" werden mitgezählt).
Diese Charakterisierung ist nicht immer eindeutig, d.h. manche Gebiete haben dieselben Begrenzungskanten.

6. Graphentheorie

6.4 Planare Graphen

Satz: Die Charakterisierung aller Gebiete durch die Angabe der Begrenzungskanten hängt von der Darstellung des Graphen ab.

Satz: Die Anzahl der Gebiete hängt *nicht* von der Darstellung des Graphen ab:

$$n - m + g = 2$$

Eulersche Polyederformel für zusammenhängende Graphen

$$n - m + g = 1 + z$$

Eulersche Polyederformel für Graphen mit z Zusammenhangskomponenten

6. Graphentheorie

6.4 Planare Graphen

<u>Wie erkennt man an der Struktur, dass ein Graph planar ist ?</u>

Def.: Der ***vollständige Graph K_n*** ist der Graph mit n Ecken, die paarweise miteinander durch eine Kante verbunden sind.

Def.: Der ***vollständige bipartite Graph $K_{n,m}$*** ist der Graph mit zwei Mengen aus n bzw. m Ecken, sodass jede Ecke der einen Menge mit jeder Ecke der anderen Ecke durch eine Kante verbunden ist.

Satz: K_n ist planar genau dann, wenn $n \leq 4$.

Satz: $K_{n,m}$ ist planar genau dann, wenn $\min\{n,m\} \leq 2$.

Satz von Kuratowski:

Ein Graph ist planar genau dann, wenn er keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ enthält.

Def: Eine Unterteilung eines Graphen entsteht durch Einfügen von zusätzlichen Ecken in bestehende Kanten.

6. Graphentheorie

6.5 Weitere Konzepte

Färbungen

Def.: Eine *zulässige Färbung eines Graphen* ist die Zuweisung von Zahlen aus einer endlichen Menge (den „Farben“) an die Ecken des Graphen derart, dass zwei benachbarte Ecken nie die gleiche Farbe haben.

Def.: Die chromatische Zahl $\chi(G)$ ist die minimale Anzahl von Farben, die notwendig sind, um G zulässig zu färben.

4-Farben-Satz:

Für jeden planaren Graphen gilt: $\chi(G) \leq 4$ (*Four colors suffice!*)

ca. 1850:	Vermutung durch britischen Mathematikstudenten Francis Guthrie
1879:	„Beweis“ durch Alfred Kempe
1890:	Finden des Fehlers im „Beweis“ von Kempe durch Percy Heawood
20. Jahrhundert:	4-Farben-Vermutung als Anstoß vieler neuer Entwicklungen in der Graphentheorie
ca. 1965:	Vorbereitung eines Computerbeweises durch H. Heesch, kein Geld für Computer
1976:	Computerbeweis durch K. Apel und W. Haken aufbauend auf Ideen von Heesch

6. Graphentheorie

6.5 Weitere Konzepte

Färbungen

Was hat unsere Definition von $\chi(G)$ mit Landkarten zu tun ?

Def.: Zu einem planaren Graphen G wird der *duale Graph D* definiert als der Graph, der entsteht, wenn jedes Gebiet von G in D durch eine Ecke ersetzt wird und zwei Ecken in D durch eine Kante verbunden werden genau dann, wenn die zugehörigen Gebiete in G durch eine Kante benachbart sind. Hierbei wird für jede Kante einer Gebietsgrenze in G eine eigene Kante zwischen den zugehörigen Ecken in D gezogen (was unter Umständen Mehrfachkanten erzeugt).

Satz: Der duale Graph zu einem planaren Graphen ist wieder planar. Außerdem ist der duale Graph eines dualen Graphen wieder der Graph selbst. Damit kann jeder planare Graph auch als dualer Graph aufgefasst werden. Damit ist jede Eckenfärbung eines planaren Graphen G auch eine Landkartenfärbung eines anderen planaren Graphen und umgekehrt.

4-Farben-Satz:

Für jede Landkarte gilt: Sie kann mit 4 Farben immer so gefärbt werden, dass zwei durch eine eindimensionale Grenze benachbarte Länder niemals die gleiche Farbe haben.

6. Graphentheorie

6.5 Weitere Konzepte

Hypergraphen

Def.: Hypergraph ist ein Graph, in dem die Hyperkanten nicht nur zwei Ecken verbinden, sondern eine beliebige Anzahl von Ecken gleichzeitig verbinden.

Def.: Ein uniformer Hypergraph ist ein Hypergraph, in dem alle Hyperkanten gleich viele Ecken miteinander verbinden.

Darstellung eines Hypergraphen im Computer:

- **Inzidenzmatrix:**
  An Position (i,j) steht eine 1, wenn die Hyperkante i die Ecke j enthält, sonst 0.
  In den Zeilen dürfen auch die Ecken und in den Spalten die Hyperkanten stehen.

- **Adjazenzmatrix:**
  An Position (i,j) steht eine 1, wenn die Ecken i und j durch eine Hyperkante verbunden sind, sonst 0.

In der Adjazenzmatrix ist eine Information nicht enthalten! Welche ?

Vorlesung Diskrete Mathematik: Ein Resumé

Aus dem benutzten Unterrichtsmaterial wurde Folgendes nicht behandelt:

Lang:

- Axiomatische Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ (4.2.1-4.2.5)
- Darstellung von Zahlen (4.3)
- Kombinatorische Behandlung von Partitionen (5.3)
- Satz von Cayley (Satz 6.4)
- Operationen mit Graphen (6.8)
- Untergruppen, Komplexe und Nebenklassen (7.1.1)
- Ringe, Polynomringe (soweit entbehrlich für Galoistheorie) und unendliche Körper (Teile von 7.2)

Vorlesung Diskrete Mathematik: Ein Resumé

Aus dem benutzten Unterrichtsmaterial wurde Folgendes nicht behandelt:

Beutelspacher:

- Details zum Schubfachprinzip (1)
- Färbungsmethoden (2)
- Fehlererkennung (6)
- Kryptographie (7)
- Netzwerke (9)
- Boolesche Algebra, so wie dort behandelt (10)

Meinel:

- Diskrete Stochastik (9)
- Teile von Boolesche Algebra (10.1, 10.6-10.10)
- Aussagenlogik, so wie dort behandelt (12)

Zusätzlich wurde Folgendes behandelt:

Galoistheorie:

- Konstruktion eines beliebigen endlichen Körpers

Vorlesung Diskrete Mathematik: Ein Resumé

Aufgabeneingrenzung für die Klausur

Aufgaben des folgenden Typs werden wegen ihres Schwierigkeitsgrads oder wegen eines ungeeigneten fachlichen Schwerpunkts in der Klausur **nicht** gestellt:

2-7; 4-4,2; 4-5; 5-1; 5-3; 6-2; 6-3; 6-5,d; 7-2; 7-4; 8-1; 9-4; 10-2

Alle anderen Aufgaben sollten zur Vorbereitung auf die Übergangsprüfung geübt werden!

Aus der 12. Vorlesungswoche sind relevant:
Kenntnis der Definitionen und Sätze, Anwendung auf konkrete Beispiele

Stoffeingrenzung

Eine stoffliche Eingrenzung gibt es nicht:

Die Auswahl der Themen war so, dass sie für das weitere Informatikstudium entweder direkt oder indirekt (wegen der Struktur) relevant sind.

Das war die Vorlesung Diskrete Mathematik

In folgender Grundvorlesung werden wir uns wieder begegnen:

Software-Engineering (B_Inf, B_MInf, B_TInf, B_WInf)

In folgenden Spezialvorlesungen könnten wir uns wieder begegnen:

Wissensbasierte Systeme (B_Inf, B_TInf, B_WInf, Master, Diplom)

Künstliche Intelligenz (Master)

Verteilte Systeme (Master, Diplom)

Service-orientierte SW-Architekturen (Master)

Objektorientierte Datenbanken (Master, Diplom)