Diskrete Mathematik

Inhalte 10. Vorlesungswoche

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Referenzen zum Nacharbeiten:

Lang 5.2, 6.1, 6.3 (nur Isomorphie), 6.9, 7.1 (Bsp. 4)
Beutelspacher 8.1
Meinel 11.1-11.4

5. Kombinatorik

5.2 Permutationen

Eine n-Permutation ist eine bijektive Abbildung *f* von einer n-elementigen Menge in sich selbst:

$$f : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \qquad i = j \Leftrightarrow f(i) = f(j)$$

Darstellungsweise von Permutationen:

Permutationstabelle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$ **Bsp.:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Anordnung $f(1) \quad f(2) \quad \ldots \quad f(n)$ $\quad 7 \; 6 \; 5 \; 4 \; 1 \; 2 \; 3$

Zyklendarstellung (1 7 3 5) (2 6) (4) = (1 7 3 5) (2 6)

Die Zerlegung in Zyklen ist nicht eindeutig,
nur die in Zyklen maximaler Länge.

Ein Zyklus der Länge 2 heißt *Transposition*

5. Kombinatorik

5.2 Permutationen

Hintereinanderschaltung (Komposition) von Permutationen:

$$(1\ 7\ 3\ 5)\ (2\ 6) \circ (1\ 3\ 5)\ (2\ 4\ 7\ 6) = (1\ 5\ 7\ 2\ 4\ 3)$$

- Die Komposition wird von *rechts nach links* ausgeführt.
- Das Operationssymbol $\circ$ kann in der Zyklendarstellung weggelassen werden,
  da die Zerlegung in disjunkte Zyklen auch als Komposition aufgefasst werden kann.

5. Kombinatorik

5.2 Permutationen

Zerlegung von Permutationen in Transpositionen:

Jede Permutation kann in eine Komposition von Transpositionen zerlegt werden:

$$(a_1 \ldots a_n) = (a_1\ a_n)\ (a_1\ a_{n-1}) \ldots (a_1\ a_2)$$

$$(1\ 7\ 3\ 5)\ (2\ 6) = (1\ 5)\ (1\ 3)\ (1\ 7)\ (2\ 6)$$

- Diese Zerlegung ist nicht eindeutig,
  besteht aber immer aus einer geraden Anzahl oder ungeraden Anzahl.

- Gemäß ihrer Zerlegungseigenschaft in Transpositionen
  bezeichnet man eine *Permutation* als *gerade* oder *ungerade*.

5. Kombinatorik

5.2 Permutationen

Die Permutationsgruppe S_n:

- Die Menge aller n-Permutationen bildet mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe, die **symmetrische Gruppe S_n**.

- Die symmetrische Gruppe ist nicht abelsch,
d.h. das Kommutativgesetz gilt nicht.

- Die Menge der geraden Permutationen bildet eine Untergruppe von S_n.
Sie heißt die **alternierende Gruppe A_n**.

6. Graphentheorie

6.1 Terminologie und Repräsentation

Definition:

Ein Graph (V,E) ist ein Gebilde aus Ecken (Knoten, *vertices*) und Kanten (*edges*): Eine Kante verbindet immer 2 Ecken. Diese Ecken sind die *Endpunkte* der Kante.

Darstellung in der Ebene:

- Die Ecken werden als Punkte in der Ebene markiert.
- Die Kanten sind Kurvensegmente (in der Regel Strecken), welche zwischen ihren Endpunkten verlaufen.
- Die Darstellung eines Graphen ist nicht eindeutig.

Isomorphie oder: Wann gelten 2 Graphen als gleich ?

2 Graphen gelten als gleich (äquivalent, isomorph), wenn sie aus gleich vielen Ecken und Kanten bestehen und eine bijektive Abbildung besteht, so dass die zugeordneten Ecken durch die zugeordneten Kanten miteinander verbunden sind.

6. Graphentheorie

6.1 Terminologie und Repräsentation

Weitere Begriffe:

- Kanten können gerichtet oder ungerichtet sein.
  Gerichtete Kanten werden auch ***Bögen*** (*arcs*) genannt.
  Graphen mit ausschließlich ungerichteten Kanten heißen ***ungerichtete Graphen***,
  Graphen mit gerichteten Kanten heißen ***Digraphen*** (*directed Graphs*).

- adjazente (benachbarte) Ecken

- inzidente (anliegende) Ecken und Kanten

- Schlingen, Mehrfachkanten

__Einfache__ (schlichte) __Graphen__ haben keine Schlingen und Mehrfachkanten.

- Grad (Valenz) einer Ecke

- Zusammenhang, Zusammenhangskomponenten, isolierte Ecken

6. Graphentheorie

6.1 Terminologie und Repräsentation

Darstellung von Graphen im Computer:

- **Adjazenzmatrix:**
  An Position (i,j) steht eine 1, wenn die Ecken i und j durch eine Kante verbunden sind, sonst 0.

- **Adjazenzliste:**
  In Zeile i stehen die Nummern aller Ecken, die durch eine Kante mit Ecke i verbunden sind.

- **Inzidenzmatrix:**
  An Position (i,j) steht eine 1, wenn die Kante i als Endpunkt die Ecke j hat, sonst 0.
  In den Zeilen dürfen auch die Ecken und in den Spalten die Kanten stehen.