Diskrete Mathematik

Inhalte 1. Vorlesungswoche

Sebastian Iwanowski
FH Wedel

Referenzen zum Nacharbeiten:

Lang 1, 2.1
Meinel 1

Organisatorisches

Vorlesung (inkl. Übung)

1. Termin: Do 8 Uhr – 9:15 Uhr HS 6
2. Termin: Fr 8 Uhr – 9:15 Uhr HS 2

Assistentin: Alissa Kaplunova

verantwortlich für Übungsaufgaben und Organisation der Tutorien

Übungsaufgaben

werden am Do ins Netz gestellt und sollen ab sofort bearbeitet werden

bei Bedarf: Lösung von Aufgaben der Vorwoche in Vorlesung am Do

bei Bedarf: Lösungshinweise für schwierige neue Aufgaben in Vorlesung am Fr

Tutorien (in Kleingruppen, geleitet von Studenten)

Besprechung aller Aufgaben eine Woche nach Ausgabe

Klärung von Verständnisschwierigkeiten in der Vorlesung

Inhaltlicher Umfang dieser Vorlesung

Inhaltliche Voraussetzungen:

Logisches Denken, Mathematik bis 9. Klasse (Gymnasium)

Lernziele dieser Vorlesung:

Verständnis für Mathematik und Freude daran

Elementare Konzepte: Logik, Mengenlehre, Zahlen

Fortgeschrittene Konzepte: Beweisstrategien, Zahlentheorie, Algebra

Spezielle Gebiete der Diskreten Mathematik: Kombinatorik, Graphentheorie

Direkte inhaltliche Relevanz für folgende Vorlesungen:

Informationstechnik, Digitaltechnik, Programmieren, Algorithmen und Datenstrukturen in C,
Analysis, Lineare Algebra, Grundlagen der Programmierung

Literatur

Lehrbücher, nach denen diese Vorlesung vorgeht:

Albrecht **Beutelspacher** / Marc-Alexander Zschiegner:
Diskrete Mathematik für Einsteiger,
Vieweg 2004 (2. Auflage), ISBN 3-528-16989-3

Rainer **Lang**: *Vorlesungsskript für die Vorlesung Diskrete Mathematik*,
FH Wedel 2005

Christoph **Meinel** / Martin Mundhenk:
Mathematische Grundlagen der Informatik,
Teubner 2002 (2. Auflage), ISBN 3-519-12949-3

Literatur

Weitere empfehlenswerte Lehrbücher:

Martin Aigner / Ehrhard Behrends:
*Alles Mathematik - Von Pythagoras zum CD-Playe*r,
Vieweg 2002 (2. Auflage), ISBN 3-528-13131-4

Martin Aigner: Diskrete Mathematik,
Vieweg 2001 (4. Auflage), ISBN 3-528-37268-0

Neville Dean: *Diskrete Mathematik,*
Pearson Studium, Reihe "im Klartext" 2003, ISBN 3-8273-7069-8

Jiri Matousek / Jaroslav Nesetril:
Diskrete Mathematik - Eine Entdeckungsreise,
Springer-Verlag 2001, ISBN 3-540-42386-9

1. Grundlagen der Mathematik

1.1 Einführung

Was ist das Wesentliche der Mathematik ?

Mathematik ist in erster Linie das Erkennen von:

- Strukturen
- Zusammenhängen
- Verallgemeinerungen
- Gemeinsamkeiten

Erst aus diesen Prinzipien folgert man:

- Rechenregeln
- Vorgehensweisen (Algorithmen)

Formalismen dienen in der Mathematik zu

- einer eindeutigen Ausdrucksweise
- einem besseren Verständnis für den Menschen

1. Grundlagen der Mathematik

1.1 Einführung

Was ist Diskrete Mathematik ?

- Logik
- Mengenlehre
- Diskrete Zahlenbereiche
- Kombinatorik
- Graphentheorie
- Algebra

Was gehört nicht zur Diskreten Mathematik ?

- Analysis / Funktionentheorie
- Lineare Algebra
- Wahrscheinlichkeitsrechnung / Statistik
- ...

1.2 Aussagenlogik

Aussagen und Wahrheitswerte

Was ist eine Aussage ?

- Eine Aussage ist ein beliebiges Objekt.
- In der Aussagenlogik sind Aussagen unteilbar.
  - Wegen der Unteilbarkeit heißen Aussagen auch *Atome*

Was ist ein Wahrheitswert ?

- Ein Wahrheitswert ist ein Element aus einer zweielementigen Menge (z.B. dargestellt als {`w`, `f`} oder {0,1}).

Was macht die Aussagenlogik ?

- Die Aussagenlogik beschäftigt sich mit Funktionen, die jeder Aussage einen Wahrheitswert zuordnen.
  - Solche Funktionen heißen *binäre Funktionen*

1.2 Aussagenlogik

Operatoren zwischen Aussagen

Durch Operatoren werden aus alten Aussagen neue Aussagen geschaffen:

Einstelliger Operator:

- **Negation (¬)**

Zweistellige Operatoren:

- **Konjunktion (∧)**
- **Disjunktion (∨)**
- **Implikation (→)**
- **Äquivalenz (↔)**

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	¬p	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

1.2 Aussagenlogik

Zusammenhang zwischen den Operatoren

Logische Äquivalenzregeln:

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Kontraposition

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Ersetzen der Implikation durch ¬ und ∨

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Ersetzen der Äquivalenz durch Implikationen

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

deMorgansche Regeln

$\neg\neg p \Leftrightarrow p$

Doppelte Negation

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	¬p	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Kommutativgesetze

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Distributivgesetze

1.2 Aussagenlogik

Zusammenhang zwischen den Operatoren

Logische Schlussregeln:

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Modus ponens

$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

Modus tollens

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

Kettenschluss

$(\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \Rightarrow p$

Indirekter Beweis

Wahrheitswerte für die neuen Aussagen:

p	q	¬p	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

$p \wedge q \Rightarrow p$ $\qquad$ $p \wedge q \Rightarrow q$

Logische Einschränkung

$(p \vee q) \wedge \neg q \Rightarrow p$

Logischer Ausschluss

1.3 Prädikatenlogik

Aussageformen, Variable und Prädikate

Was ist eine Aussageform ?

- Eine Aussageform ist eine Ausdruck mit Variablen aus bestimmten Definitionsbereichen.
- Die Belegung jeder Variable mit einem zulässigen Wert macht aus einer Aussageform eine Aussage

Was ist ein Prädikat ?

- Ein Prädikat beschreibt die Eigenschaft einer Wertemenge, eine Aussageform zu einer wahren Aussage zu machen.
- Für jede Wertekonstellation von Werten aus dem Definitionsbereich der Variablen ist das zu der jeweiligen Aussageform gehörende Prädikat definiert.
- Ein Prädikat kann wahr (erfüllt) oder falsch (nicht erfüllt) sein.

1.3 Prädikatenlogik

Quantoren

Der Existenzquantor $\exists x \ (\ldots)$ drückt aus, dass es einen Wert für x gibt, der den dahinter stehenden Ausdruck zu einer wahren Aussage macht.

Der Allquantor $\forall x \ (\ldots)$ drückt aus, dass jeder Wert für x den dahinter stehenden Ausdruck zu einer wahren Aussage macht.

Die Definitionsbereiche für die Variablen dürfen eingeschränkt werden:

Für den Existenzquantor ist das eine Verschärfung,
für den Allquantor eine Abschwächung der Aussage.

Bsp.:

$$\exists x \in \mathbf{R} \ \exists y \in \mathbf{R} \ ((2 < x < 4) \wedge (0 < y < 6) \wedge (x + y > 7) \wedge (x \cdot y < 10))$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \ (x \cdot x \geq 0)$$