
**Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in
Diskrete Mathematik (SS 2005)**

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt auszufüllen und zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 48 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 24 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (11 BE):

Gegeben seien folgende Teilmengen der natürlichen Zahlen:

$$A = \{x \mid x \text{ ist durch } 4 \text{ teilbar}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ ist durch } 100 \text{ teilbar}\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ ist durch } 400 \text{ teilbar}\}$$

$$D = \{x \mid x \text{ ist nicht durch } 20 \text{ teilbar}\}$$

$$E = \{x \mid x \text{ ist nicht durch } 40 \text{ teilbar}\}$$

- a) Beschreiben Sie die Mengen $A \cap B$, $B \cap D$ und $B \cap E$ durch Elementaufzählung !
(Bsp. für A : $\{0, 4, 8, 12, \dots\}$; es sind hier drei verschiedene Mengen zu beschreiben) (3 BE)
- b) Beschreiben Sie die beiden Mengen $(A \cap \sim B) \cup C$ und $\sim A \cup E$ in Worten ! (2 BE)
- c) Geben Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen an (mit kurzer Begründung): (6 BE)
- i) $(A \cap B) \subseteq ((A \cap \sim B) \cup C)$
 - ii) $D \subseteq (B \cup D)$
 - iii) $(B \cap D) \subseteq (A \cup \sim E)$
 - iv) $((A \cap \sim B) \cup C) \subseteq A$
 - v) $4 \in (\sim A \cup E)$
 - vi) $40 \in (\sim A \cup E)$

2. Aufgabe (5 BE)

- a) Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm für die Mengen A, B, C, D, E aus Aufgabe 1 bezüglich der Ordnungsrelation \subseteq ! (3 BE)
- b) Benennen Sie die maximalen und minimalen Elemente des Diagramms von a)! (2 BE)

3. Aufgabe(5 BE):

Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n : $\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

4. Aufgabe(5 BE):

Berechnen Sie für eine beliebige natürliche Zahl $n > 0$ (mit eventuellen Zwischenschritten!):

- a) $n^2 \bmod n$ (1 BE)
- b) $(n^2-1) \bmod (n-1)$ (2 BE)
- c) $(n-1)^2 \bmod n$ (2 BE)

5. Aufgabe (12 BE)

- a) Erstellen Sie die Multiplikationstafel für \mathbf{Z}_4^* ! (2 BE)
- b) Erstellen Sie die Additionstafel für $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$! (3 BE)
- c) Identifizieren Sie alle Elemente von $\text{GF}(4)$ mit Polynomen! (1 BE)
- d) Erstellen Sie die vollständige Additions- und Multiplikationstafel von $\text{GF}(4)$! (4 BE)
- e) Demonstrieren Sie die Gültigkeit des Distributivgesetzes Ihrer Konstruktion anhand des Ausdrucks $(2+2) \cdot 3$! (2 BE)

6. Aufgabe (2 BE)

Welchen Koeffizienten hat der Term ab^3c in $(a + b + c)^5$? Geben Sie den Rechenweg an!

7. Aufgabe (4 BE)

- a) Berechnen Sie die Komposition der Permutation $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 4\ 3\ 2)$! (gegeben in Zykelschreibweise) (1 BE)
- b) Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass die Komposition nicht kommutativ ist! (1 BE)
- c) Stellen Sie das Ergebnis von a) als Komposition von Transpositionen dar. Handelt es sich um eine gerade oder eine ungerade Permutation? (2 BE)

8. Aufgabe (4 BE)

- a) Geben Sie die Adjazenzliste des unten abgebildeten Graphen an! (2 BE)
- b) Zeichnen Sie den Graphen so, das die Ecken F, G, H, I, J außen liegen! (2 BE)

