
Aufgaben zur Klausur und Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik (WS 2006/2007)*

Zeit: 90 Minuten

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten und fertigen Lösungen auf gesonderten karierten Blättern ein (Vorder- und Rückseite benutzen). Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Dieses Aufgabenblatt ist nicht abzugeben. Daher werden Lösungen darauf nicht gewertet.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt Ihrer Lösungen zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 42 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 21 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (6 BE):

Gegeben sei als Grundmenge Ω die Menge der ganzen Zahlen:

$$A = \{x \text{ ist eine Zahl, die kleiner als Null ist}\}$$

$$B = \{x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$$

$$C = \{x \text{ ist eine dreistellige Zahl, deren letzte beiden Ziffern der Dezimaldarstellung 0 sind}\}$$

- a) Geben Sie für jede der angegebenen Mengen eine Darstellung an, die ganz auf Wörter der deutschen Sprache verzichtet. Verwenden Sie stattdessen für endliche Mengen eine Aufzählung der Elemente und für unendliche Mengen eine Darstellung mit logischen und arithmetischen Operatoren, z.B. den Operator „|“ für „teilt“. (3 BE)
- b) Geben Sie die folgenden Mengen als Aufzählung an, wenn sie endlich sind, bzw. beschreiben Sie diese in Worten, wenn sie unendlich sind und geben Sie in diesem Fall wenigstens 3 Elemente konkret an: (3 BE)

$$A \cap C, \quad C \setminus B, \quad C \Delta B$$

Anm.: Hierbei steht Δ für die symmetrische Differenz.

2. Aufgabe (7 BE)

Sei $M = \{\text{Alice, Otto, Susanne, Alexander, Anna}\}$

Eine Person aus M steht zu einer Person aus M in der Relation R , wenn sie dasselbe Geschlecht hat oder (im Sinne von „v“) ihr Name gleich viele Buchstaben.

Anm.: Die *kursiven* sind weiblich, die anderen männlich

- a) Geben Sie alle Elemente der Relation R explizit an! (3 BE)
- b) Ist R eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation oder eine Funktion? Geben Sie für alle drei Eigenschaften eine Begründung an! (3 BE)
- c) Eine Eigenschaft, die in b) nicht erfüllt ist, kann man sehr leicht erfüllen, indem man eine Person aus M streicht. Welche Eigenschaft ist das und welche Person muss man streichen? (1 BE)

3. Aufgabe (5 BE)

Gegeben sei die Boolesche Algebra $\mathcal{B} = \text{Potenzmenge}(\{1,2\})$ mit den Operationen i), ii), iii):

- i) $\sim p = \{1,2\} \setminus p$
- ii) $p \oplus q = p \cup q$
- iii) $p \odot q = p \cap q$

- a) Geben Sie das Nullelement und das Einselement an! (1 BE)
- b) Wählen Sie 3 verschiedene Elemente $p, q, r \in \mathcal{B}$ und zeigen Sie für diese Elemente, dass das Distributivgesetz sowohl für $(p \oplus q) \odot r$ als auch für $(p \odot q) \oplus r$ erfüllt ist (2 Aufgaben)! Geben Sie in Ihrer Rechnung auch die Zwischenwerte an! (4 BE)

4. Aufgabe (4 BE)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

Wenn ein Erdteil ausschließlich durch Kreise in eine Landkarte unterteilt wird, dann kann man diese Landkarte durch 2 Farben zulässig färben.

5. Aufgabe (3 BE)

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von 2196 und 6771 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus! Geben Sie die Zwischenschritte an!

6. Aufgabe (4 BE)

- a) Geben Sie eine Verknüpfungstabelle für die Gruppe $(\mathbb{Z}_{18}^*, *)$ an! (3 BE)
- b) Wenn Sie die Operation $*$ in \mathbb{Z}_{18}^* als die additive Verknüpfung auffassen, kann man dann noch eine multiplikative Verknüpfung definieren, sodass aus \mathbb{Z}_{18}^* ein Körper wird? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 BE)

7. Aufgabe (6 BE)

- a) Arbeiten Sie für die Multiplikation in $GF(27)$ mit dem Polynom $P(x) = x^3 + x^2 + x + 2$: Über welchem Körper muss dieses Polynom irreduzibel sein? Weisen Sie die Irreduzibilität explizit nach! (3 BE)
- b) Multiplizieren Sie in $GF(27)$ die Elemente $x+2$ und $2x+1$ (3 BE)

8. Aufgabe (7 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

- a) Gesucht sei der kürzeste Weg von A nach E mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra: Geben Sie die Reihenfolge der Ecken an, in welcher der Algorithmus den kürzesten Weg von A *endgültig bestimmt* hat, bis er den kürzesten Weg zur Ecke E bestimmt hat (nicht die Reihenfolge auf dem kürzesten Weg)! Geben Sie für all diese Ecken die errechnete Weglänge an! (2 BE)
- b) Geben Sie die (Ecken-)Färbungszahl des Graphen an und begründen Sie Ihre Antwort! (2 Begründungen: Warum ist die Zahl nicht größer und warum nicht kleiner) (2 BE)
- c) Hat der Graph einen Eulerkreis, Eulerweg oder Hamiltonkreis? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort! (3 BE)

