Fachhochschule Wedel 08.03.2007

Prof. Dr. Sebastian Iwanowski

Aufgaben zur 2. Übergangsprüfung in *Diskrete Mathematik* (WS 2006 / 2007)

Zeit: 90 Minuten,

erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte tragen Sie Ihre Antworten auf gesonderten karierten Blättern ein. Markieren Sie klar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört und als solche gewertet werden soll. Nicht zu wertende Passagen sind durchzustreichen.

Vergessen Sie nicht, das Deckblatt zu unterschreiben.

Für die Prüfung werden insgesamt 50 Bewertungseinheiten (BE) vergeben. Zum Bestehen benötigen Sie mindestens 25 BE.

Viel Erfolg !

1. Aufgabe (9 BE):

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 2\}$, $C = \{-2, 1, 2\}$

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben das Ergebnis an (als Menge oder Wahrheitswert, je nach Aufgabe)! Geben Sie auch die Zwischenergebnisse bzw. Begründungen an, die zur Bestimmung des Ergebnisses erforderlich sind!

a) $(A \cap B) = (B \cap C)$ (1 BE)

b) $(A \cup B) \subseteq (A \cup C)$ (2 BE)

c) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (2 BE)

d) $(A \setminus B) \setminus C \in C \setminus (B \setminus A)$ (2 BE)

e) $(A \cup B \cup C) \in$ Potenzmenge ($\mathbb{Z}$) (2 BE)

2. Aufgabe (8 BE)

Sei M die Menge aller Teiler von 18.

Ein Teiler a stehe in Relation R zu Teiler b, wenn a teilt b.

a) Geben Sie die Menge M explizit an!

b) Geben Sie die Relation R als Menge explizit an!

c) Ist R eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie Ihre Antwort!
   Falls ja, geben Sie die Äquivalenzklassen an!

d) Ist R eine Ordnungsrelation? Begründen Sie Ihre Antwort!
   Falls ja, zeichnen Sie das Hasse-Diagramm!

3. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei die folgende Formel: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

a) Beweisen Sie diese Formel für n = 2 ! (unabhängig von Aufgabe b) (2 BE)

b) Beweisen Sie die Formel durch vollständige Induktion für alle n (n ≥ 1) ! (6 BE)

Tipp: Verwenden Sie in Ihrer Rechnung die Gleichung `n(2n+3)+1=(2n+1)(n+1)`

4. Aufgabe (8 BE)

a) Geben Sie alle Elemente von $(\mathbb{Z}_4)^2$ mit Ordnung 2 bzgl der additiven Gruppe an!

b) Geben Sie alle Elemente von $(\mathbb{Z}_4)^2$ mit Ordnung 1 bzgl der additiven Gruppe an!

c) Wie viele Elemente von $(\mathbb{Z}_2)^4$ haben bzgl der additiven Gruppe die Ordnung 2?

Geben Sie eines davon an!

d) Sind die Gruppen $((\mathbb{Z}_2)^4,+)$ und $((\mathbb{Z}_4)^2,+)$ isomorph? Begründen Sie Ihre Antwort!

e) Können Sie aus der Gruppe $((\mathbb{Z}_4)^2,+)$ einen Körper durch zusätzliches Definieren einer Multiplikation machen? Begründen Sie Ihre Antwort!

5. Aufgabe (5 BE)

Arbeiten Sie für die Multiplikation in GF (27) mit dem irreduziblen Polynom $P(x) = x^3+x^2+x+2$:
Multiplizieren Sie die Elemente $x+2$ und x^2+1

6. Aufgabe (4 BE)

a) Berechnen Sie die Komposition der Permutationen (1 3 5 4 2) (2 4 1 5 3) ! Interpretieren Sie die Aufgabenstellung als Zyklen und geben Sie auch das Ergebnis so an! Vereinfachen Sie so weit wie möglich! (2 BE)

b) Stellen Sie das Ergebnis von a) als Komposition von Transpositionen dar. Handelt es sich um eine gerade oder eine ungerade Permutation? (2 BE)

7. Aufgabe (8 BE)

Gegeben sei der unten angegebene Graph.

a) Ist der Graph planar (= plättbar)? Begründen Sie Ihre Antwort! (2 BE)

b) Geben Sie eine Adjazenz<u>liste</u> für den Graphen an! (3 BE)

c) Geben Sie einen minimal spannenden Baum an! Zeichnen Sie diesen und wählen Sie eine Wurzel aus, sodass die Suchtiefe minimal ist! Geben Sie diese Suchtiefe an! (3 BE)